Московский Физико-Технический Институт
(Государственный Университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра фундаментальных и прикладных проблем физики микромира
Объединенный Институт Ядерных Исследований
Учебно-научный центр

Бычков В.С.

Суперполевой подход к редуцированным уравнениям теории суперструн на пространствах типа $AdS_n \times S^n$

Магистерская работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Е.А. Иванов

Дубна 2012

Содержание

1 Введение

Теория струн на $AdS_5 \times S^5$ представляется действием типа Грина-Шварца (ГШ) [1] на суперкосете $\frac{PSU(2,2|4)}{SO(1,4)\times SO(5)}$ [2]. Будучи существенно нелинейной теорией, она не поддается прямому квантованию. По аналогии с суперструной в плоском пространстве в данном случае можно было бы попробовать использовать калибровку светового конуса, но это не приводит к упрощению действия и, к тому же, нарушает $2d$-инвариантность Лоренца. Отсутствие $2d$-инвариантности Лоренца делает невозможным применение известных результатов и методов $2d$ интегрируемой теории поля. В частности, S-матрица рассеяния струнных возбуждений в калибровки светового конуса не обладает $2d$-инвариантностью Лоренца.

В альтернативном подходе [3, 4] используется редукция Полмаера [5], которая позволяет переформулировать теорию в терминах только физических степеней свободы. Она основывается на записи уравнений движения в терминах косетных токов. Замечательными особенностями переформулированной теории для модели ГШ $AdS_5 \times S^5$ (а также для $AdS_2 \times S^2$ и $AdS_3 \times S^3$ см. [6]) являются явная $2d$-инвариантность Лоренца и стандартный вид для кинетических фермионных членов. Кроме того, в чисто бозонном случае [7], $AdS_5 \times S^5$ $(n = 2, 3, 5)$ редукция Полмаера сохраняет интегрируемость - редуцированная теория является интегрируемой деформацией калибровочной модели Весса-Зумино-Виттена с дополнительным потенциальным слагаемым.

Возможно, что эта редуцированная теория суперструны в пространстве $AdS_5 \times S^5$ может стать удобной отправной точкой при квантовании. Однако, множество нерешенных проблем даже на классическом уровне, таких как интерпретация сохраняющихся зарядов, выбор вакуума, фиксация остаточной калибровочной симметрии, существование мировой суперсимметрии и т.д., побуждает заняться сперва более простыми вариантами теории, т.е. моделями суперструн ГШ на $AdS_n \times S^n$ для $n = 2, 3$. В случае $AdS_2 \times S^2$ редуцированная теория оказывается очень простой и может быть отождествлена с $\mathcal{N} = (2, 2)$ $2d$ суперсимметричным расширением модели "sine-Гордон"[3]. В секции 2 мы кратко приведем обзор этого случая.

Проблеме существования мировой суперсимметрии для теорий на пространствах $AdS_n \times S^n$ для $n = 2, 3, 5$ была посвящена серия работ [3, 6], где выяснилось, что для всех n эти теории обладают $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметрией. В более поздних работах [8] и [12] было показано, что на классическом уровне редуцированные по Полмаеру теории на пространствах $AdS_3 \times S^3$ и $AdS_5 \times S^5$ обладают $\mathcal{N} = (4, 4)$ и $\mathcal{N} = (8, 8)$ суперсимметрией соответственно. Однако, оказалось, что эти суперсимметрии нелокальные и для дальнейшего понимания полученных результатов необходимо сформулировать рассматриваемые модели полностью вне массовой оболочки, т.е. перейти к суперполевому описанию. Также в работе [12] Холловуда и Мирамонтеса было показано, что полными группами мировой суперсимметрии в случаях $n = 3$ и $n = 3$ являются супергруппы $SU(2|2)$ и $SU(2|2) \times SU(2|2)$. Таким образом, $2d$ суперпространства, в рамках которых надо строить суперполевые формулировки редуцированных суперструн, должны быть фактор-пространствами этих супергрупп. Стоит также отметить, что группа мировой суперсимметрии $SU(2|2)$ появлялась и в моей с Е.Ивановым работе [13].

Суперполевая формулировка теории суперструн на $AdS_2 \times S^2$ (секц. 2) была известна довольно давно. В качестве суперпространства берется стандартное расширение пространства Минковского $\mathcal{M}^2$, дополненное четырьмя антикоммутирующими координатами - $\mathcal{M}^{2|4}$. Однако такое суперпространство не является подходящим в случае теории на $AdS_3 \times S^3$, так как в ее основе лежит группа $SU(2|2)$. Поэтому мы воспользуемся стандартной процедурой Картана для построения суперпространства как фактор-пространства центрально-расширенной группы $SU(2|2)$ по ее подгруппе $SU(2) \times SU(2)$, а затем, мы гармонизуем одну группу $SU(2)$. Такое гармоническое суперпространство оказывается наиболее подходящим для построения суперполевого действия.

2 Обзор: редуцированная модель для суперструны на пространстве $AdS_2 \times S^2$

Известно, что $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметрия в $2d$ является произведением одномерных $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрий, действующих в прямом произведении левого и правого суперпространств

$$(x^{++}, \theta^+, \bar{\theta}^+) \times (x^{--}, \theta^-, \bar{\theta}^-), \tag{2.1}$$

а группа Лоренца реализована таким образом, что $x^{++}x^{--} = inv$. Ковариантные производные в (2.1) определяются стандартным образом

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial \theta^+} - i\bar{\theta}^+ \partial_{++}, \quad \bar{D}_1 = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+} + i\theta^+ \partial_{++},$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial \theta^-} - i\bar{\theta}^- \partial_{--}, \quad \bar{D}_2 = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-} + i\theta^- \partial_{--}. \tag{2.2}$$

Удобнее работать в аналитическом подпространстве пространства (2.1), определяемом также стандартным образом

$$(x_L^{++} = x^{++} - i\theta^+\bar{\theta}^+, x_L^{--} = x^{--} - i\theta^-\bar{\theta}^-, \theta^+, \theta^-). \tag{2.3}$$

Ковариантные производные примут вид

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial \theta^+} - 2i\bar{\theta}^+ \partial_{++}, \quad \bar{D}_1 = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+},$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial \theta^-} - 2i\bar{\theta}^- \partial_{--}, \quad \bar{D}_2 = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-}, \tag{2.4}$$

$$\{D_1, \bar{D}_1\} = 2i\partial_{++}, \quad \{D_2, \bar{D}_2\} = 2i\partial_{--}. \tag{2.5}$$

Теория на пространстве $AdS_2 \times S^2$ описывается скалярным киральным суперполем $\Phi = \Phi(x_L^+, x_L^-, \theta^+, \theta^-)$, которое удовлетворяет условиям $\bar{D}_1\Phi = \bar{D}_2\Phi = 0$, а в компонентах имеет следующий вид

$$\Phi = A(x_L^{++}, x_L^{--}) + \sqrt{2}\theta^+\psi_1(x_L^{++}, x_L^{--}) + \sqrt{2}\theta^-\psi_2(x_L^{++}, x_L^{--}) + 2\theta^+\theta^- D(x_L^{++}, x_L^{--}). \tag{2.6}$$

Действие определим следующим образом

$$S = \int d^2x d^4\theta \Phi\bar{\Phi} + \Big[\int d^2x d^2\theta W(\Phi) + c.c.\Big]^1 =$$

$$= \int d^2x \Big(\partial_{++}A\partial_{--}\bar{A} + i\psi_1\partial_{--}\bar{\psi}_1 + i\psi_2\partial_{++}\bar{\psi}_2 + D\bar{D} +$$

[1] Интегралы по грассманавомы переменным определены следующим образом: $\int d\theta^+ d\theta^- \theta^+\theta^- = \int d\bar{\theta}^- d\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^- \bar{\theta}^+ = \frac{1}{2}, \quad \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\theta^2\bar{\theta}^2 = \frac{1}{4}$

$$+DW'(A)-\psi_1\psi_2W''(A)+\bar{D}\bar{W}'(\bar{A})+\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\bar{W}''(\bar{A})\Big). \qquad (2.7)$$

После исключения вспомогательных полей D и $\bar{D}$ получим

$$L=\partial_{++}A\partial_{--}\bar{A}+i\psi_1\partial_{--}\bar{\psi}_1+i\psi_2\partial_{++}\bar{\psi}_2-|W'(A)|^2-\psi_1\psi_2W''(A)+\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\bar{W}''(\bar{A}). \quad (2.8)$$

Положим $A=\varphi+i\phi,\quad \psi_1=\psi_{11}+i\psi_{12},\quad \psi_2=\psi_{21}+i\psi_{22}$, а суперпотенциал выберем следующим образом: $W(\Phi)=\mu\cos(\Phi)$, тогда лагранжиан в терминах физических вещественных бозонных (φ,ϕ) и фермионных $(\psi_{11},\psi_{12},\psi_{21},\psi_{22})$ полей примет вид

$$\begin{gathered}L=\partial_{++}\varphi\partial_{--}\varphi+\partial_{++}\phi\partial_{--}\phi+\frac{\mu^2}{2}(\cos 2\varphi-\cosh 2\phi)+\\ +i\psi_{11}\partial_{--}\psi_{11}+i\psi_{12}\partial_{--}\psi_{12}+i\psi_{21}\partial_{--}\psi_{21}+i\psi_{22}\partial_{--}\psi_{22}+\\ +2i\mu\Big(\cosh\phi\cos\varphi(\psi_{11}\psi_{22}+\psi_{12}\psi_{21})+\sinh\phi\sin\varphi(\psi_{12}\psi_{22}-\psi_{11}\psi_{21})\Big). \qquad (2.9)\end{gathered}$$

Генераторы левых и правых суперсимметрий в базисе (2.3) имеют вид

$$\begin{gathered}Q_1=\frac{\partial}{\partial\theta^+},\quad \bar{Q}_1=-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^+}-2i\theta^+\partial_{++},\\ Q_2=\frac{\partial}{\partial\theta^-},\quad \bar{Q}_2=-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^-}-2i\theta^-\partial_{--}. \qquad (2.10)\end{gathered}$$

Рассмотрим преобразование $\mathcal{N}=(2,0)$ суперсимметрии

$$\delta\Phi=-[\epsilon Q_1-\bar{\epsilon}\bar{Q}_1]\Phi, \qquad (2.11)$$

соответствующие преобразования компонент суперполя Φ имеют вид

$$\delta A=-\sqrt{2}\epsilon\psi_1,\quad \delta\psi_1=\sqrt{2}i\bar{\epsilon}\partial_{++}A,\quad \delta\psi_2=\sqrt{2}\epsilon D,\quad \delta D=-\sqrt{2}i\bar{\epsilon}\partial_{++}\psi_2. \qquad (2.12)$$

Разбивая параметр ϵ на вещественную и мнимую часть $\epsilon_1+i\epsilon_2$, получим преобразования суперсимметрии для лагранжиана (2.9)

$$\begin{gathered}\delta\varphi=-\sqrt{2}i\epsilon_2\psi_{11}-\sqrt{2}i\epsilon_1\psi_{12},\qquad \delta\psi_{11}=\sqrt{2}\epsilon_2\partial_{++}\varphi-\sqrt{2}\epsilon_1\partial_{++}\phi,\\ \delta\phi=\sqrt{2}i\epsilon_1\psi_{11}-\sqrt{2}i\epsilon_2\psi_{12},\qquad \delta\psi_{12}=\sqrt{2}\epsilon_1\partial_{++}\varphi+\sqrt{2}\epsilon_2\partial_{++}\phi,\\ \delta\psi_{21}=\sqrt{2}\mu\epsilon_1\sin\varphi\cosh\phi+\sqrt{2}\mu\epsilon_2\cos\varphi\sinh\phi,\\ \delta\psi_{22}=\sqrt{2}\mu\epsilon_2\sin\varphi\cosh\phi-\sqrt{2}\mu\epsilon_1\cos\varphi\sinh\phi. \qquad (2.13)\end{gathered}$$

Также легко убедиться, что

$$[\delta_1,\delta_2]A=-2i(\epsilon_2\bar{\epsilon}_1-\epsilon_1\bar{\epsilon}_2)\partial_{++}A,$$

$$[\delta_1,\delta_2]\psi_1 = -2i(\epsilon_2\bar\epsilon_1 - \epsilon_1\bar\epsilon_2)\partial_{++}\psi_1, \quad [\delta_1,\delta_2]\psi_2 = -2i(\epsilon_2\bar\epsilon_1 - \epsilon_1\bar\epsilon_2)\partial_{++}\psi_2, \tag{2.14}$$

как и должно быть. Преобразования для $\mathcal{N} = (0,2)$ выглядят аналогично, только фермионные поля ψ_1 и ψ_2 меняются ролями.

Итак, мы получили суперполевую формулировку (2.7) редуцированной теории суперструн на пространстве $AdS_2 \times S^2$.

3 Гармоническое суперпространство $\mathcal{N} = (4|4)$ в 2d

В этом разделе мы построим гармоническое суперпространство, наиболее подходящее для нашей задачи.

3.1 Алгебра, суперкосет, формы Картана и ковариантные производные

Рассмотрим следующую центрально расширенную супералгебру $su(2|2)$ в $d = 2$:

$$\{Q^{ia}_{(\pm)}, Q^{jb}_{(\pm)}\} = 2\epsilon^{ij}\epsilon^{ab}P_{(\pm\pm)}\,, \tag{3.1}$$

$$\{Q^{ia}_{(+)}, Q^{jb}_{(-)}\} = im\left(\epsilon^{ab}T^{ij} - \epsilon^{ij}T^{ab}\right), \tag{3.2}$$

$$[T^{ij}, Q^{ka}_{(\pm)}] = \frac{1}{2}\left(\epsilon^{ik}Q^{ja}_{(\pm)} + \epsilon^{jk}Q^{ia}_{(\pm)}\right), \quad [T^{ab}, Q^{kc}_{(\pm)}] = \frac{1}{2}\left(\epsilon^{ac}Q^{kb}_{(\pm)} + \epsilon^{bc}Q^{ka}_{(\pm)}\right),$$

$$[T^{ij}, T^{kl}] = \epsilon^{il}T^{kj} + \epsilon^{jk}T^{il}\,, \quad [T^{ab}, T^{cd}] = \epsilon^{ad}T^{bc} + \epsilon^{bc}T^{ad}\,. \tag{3.3}$$

Остальные (анти)коммутаторы равны нулю. Генераторы $T^{ik} = T^{ki}, T^{ab} = T^{ba}$ образуют две коммутирующие между собой алгебры $su(2)$. Правила сопряжения следующие: $(Q^{ia}_{(\pm)})^\dagger = Q_{(\pm)\,ia}\,, (T^{ik})^\dagger = -T_{ik}$, и аналогично для T^{ab}. Мы построим реализацию $SU(2|2)$ в $\mathcal{N} = (4|4), d = 2$ суперпространстве, отождествленном с суперкосетом $SU(2|2)/[SU(2)\times SU(2)]$. Параметризацию для суперкосета мы выберем следующим образом

$$g = e^{i\theta_{ia}Q^{ia}_{(+)}}\, e^{i\hat\theta_{ia}Q^{ia}_{(-)}}\, e^{i(x^{(++)}P_{(++)} + x^{(--)}P_{(--)})}\,. \tag{3.4}$$

Сперва мы вычислим лево-ковариантные 1-формы Картана

$$g^{-1}dg = i\Delta x^{(++)}\,P_{(++)} + i\Delta x^{(--)}\,P_{(--)} + i\Delta\theta^{ia}\,Q_{(+)\,ia} + i\Delta\hat\theta^{ia}\,Q_{(-)\,ia} + \Omega_{ik}T^{ik} + \Omega_{ab}T^{ab}\,. \tag{3.5}$$

Явные выражения для этих форм следующие

$$\Delta x^{(++)} = dx^{(++)} + i\theta\cdot d\theta\,, \quad \Delta x^{(--)} = dx^{(--)} + i\hat\theta\cdot d\hat\theta + \frac{2}{3}m\,\hat\theta^{jd}\hat\theta^i_d\hat\theta^a_{(i}d\theta_{j)a}\,, \tag{3.6}$$

$$\Delta\theta^{ia} = d\theta^{ia}\,, \quad \Delta\hat\theta^{ia} = d\hat\theta^{ia} - im\,\hat\theta^{ja}\hat\theta^{ib}\,d\theta_{jb}\,, \tag{3.7}$$

$$\Omega_{ik} = -im\,\hat\theta^a_{(i}d\theta_{k)a}\,, \quad \Omega_{ab} = im\,\hat\theta^k_{(a}d\theta_{b)k}\,. \tag{3.8}$$

Здесь $''\cdot''$ означает свертку по индексам $SU(2)$, т.е. $\theta\cdot d\theta := \theta^{ia}d\theta_{ia}\,.$

Ковариантные производные некоторого суперполя $\Phi^A(\theta, \hat{\theta}, x^{\pm\pm})$ мы найдем из общего выражения для ковариантного дифференциала

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi^A &= d\Phi^A + \Omega_{ik}(T^{ik})^A{}_B\,\Phi^B + \Omega_{ab}(T^{ab})^A{}_B\,\Phi^B \\
&= \Delta x^{(++)}\,\mathcal{D}_{(++)}\Phi^A + \Delta x^{(--)}\,\mathcal{D}_{(--)}\Phi^A + \Delta\theta^{ia}\,\mathcal{D}_{ia}\Phi^A + \Delta\hat{\theta}^{ia}\,\hat{\mathcal{D}}_{ia}\Phi^A\,. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Явно, ковариантные производные задаются следующими выражениями

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{(\pm\pm)} &= \partial_{(\pm\pm)}\,, \quad \hat{\mathcal{D}}_{ia} = \hat{\partial}_{ia} + i\hat{\theta}_{ia}\partial_{(--)} := \hat{D}_{ia}\,, \\
\mathcal{D}_{ia} &= D_{ia} - i\frac{m}{2}\left(\hat{\theta}^{kb}\hat{\theta}_{ka}\hat{D}_{ib} - \hat{\theta}^{ld}\hat{\theta}_{id}\hat{D}_{la}\right) + \frac{2}{3}m\,\hat{\theta}^d_i\,\hat{\theta}^k_a\,\hat{\theta}_{kd}\,\partial_{(--)} \\
&\quad + im\left[\epsilon_{i(j}\hat{\theta}_{k)a}\,T^{jk} - \epsilon_{a(b}\hat{\theta}_{c)i}\,T^{bc}\right], \quad D_{ia} := \partial_{ia} + \theta^{ia}\partial_{(++)}\,. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Они удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&\{\mathcal{D}_{ia}, \mathcal{D}_{jb}\} = 2i\epsilon_{ij}\epsilon_{ab}\partial_{(++)}\,, \quad \{\hat{\mathcal{D}}_{ia}, \hat{\mathcal{D}}_{jb}\} = 2i\epsilon_{ij}\epsilon_{ab}\partial_{(--)}\,, \\
&\{\hat{\mathcal{D}}_{ia}, \mathcal{D}_{jb}\} = im\left(\epsilon_{ab}T_{ij} - \epsilon_{ij}T_{ab}\right). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Отметим, что ковариантные производные включат в себя только "спиновые" части $SU(2)$ генераторов (реализованны также на грассмановых координатах), т.е. части, действующие на внешние $SU(2)$ индексы.

3.2 Преобразования суперсимметрии

Преобразования координат $\mathcal{N} = 4$ суперпространства под действием левых сдвигов с параметрами ϵ^{ia} и $\hat{\epsilon}^{ia}$, также как и индуцированные инфинитезимальные преобразования подгруппы стабильности $SU(2) \times SU(2)$ могут быть найдены из следующей общей формулы

$$g^{-1}(i\epsilon \cdot Q_{(+)}, i\hat{\epsilon} \cdot Q_{(-)})g = g^{-1}\delta g + \delta h_{ik}T^{ik} + \delta h_{ab}T^{ab}. \qquad (3.12)$$

Явные вычисления приводят к следующим результатам.

Преобразования с ϵ:

$$\delta_\epsilon\,\theta^{ia} = \epsilon^{ia}\,, \quad \delta_\epsilon\,x^{(++)} = i\theta\cdot\epsilon\,, \quad \delta_\epsilon\,\theta^{ia} = \delta_\epsilon\,x^{(--)} = \delta_\epsilon\,h_{ik} = \delta_\epsilon\,h_{ab} = 0\,. \qquad (3.13)$$

Преобразования с $\hat{\epsilon}$:

$$\delta_{\hat\epsilon}\,\theta^{ia} = im\,\theta^{ka}\theta^{ib}\,\hat\epsilon_{kb}\,, \qquad \delta_{\hat\epsilon}\,x^{(++)} = \frac{m}{3}\,\theta^{jc}\,\theta^{k}_{c}\theta^{b}_{j}\,\hat\epsilon_{kb}\,,$$

$$\delta_{\hat\epsilon}\,\hat\theta^{ia} = \hat\epsilon^{ia} + im\left[\hat\theta^{k(d}\theta^{a)}\,\hat\epsilon^{i}_{d} - \hat\theta^{b(k}\theta^{i)}_{b}\,\hat\epsilon^{a}_{k}\right], \qquad \delta_{\hat\epsilon}\,x^{(--)} = i\hat\theta\cdot\hat\epsilon\,, \tag{3.14}$$

$$\delta_{\hat\epsilon}\,h_{ik} := \omega_{ik} = im\,\theta^{a}_{(i}\,\hat\epsilon_{k)a}\,, \qquad \delta_{\hat\epsilon}\,h_{ab} := \omega_{ab} = -im\,\theta^{i}_{(a}\,\hat\epsilon_{b)i}\,. \tag{3.15}$$

Непосредственная проверка показывает, что формы Картана подчиняются следующим индуцированным $SU(2)\times SU(2)$ преобразованиям при преобразовании координат (3.13), (3.14), т.е.,

$$\delta_{\epsilon}\,\Delta\theta_{ia} = 0\,, \quad \delta_{\hat\epsilon}\,\Delta\theta_{ia} = -\omega_{i}^{\ k}\,\Delta\theta_{ka} - \omega_{a}^{\ b}\,\Delta\theta_{ib}\,. \tag{3.16}$$

Интересной особенностью этой реализации "центрального базиса"является то, что она сохраняет меру интегрирования в $\mathcal{N}=4, d=2$ суперпространстве.

$$\delta(d^2xd^4\theta d^4\hat\theta) = d^2xd^4\theta d^4\hat\theta(-\partial_{ia}\delta\theta^{ia} - \hat\partial_{ia}\delta\hat\theta^{ia}) = 0\,. \tag{3.17}$$

3.3 Гармоническая аналитичность

Мы "гармонизуем"группу $SU(2)$ действующую на индексах i и предположим, что гармонические суперполя не несут внешних $SU(2)$ индексов. Мы введем стандартный набор гармонических переменных $u^{\pm}_{i}$ с асимметричным законом преобразования при $\hat\epsilon$ суперсимметрии:

$$\delta_{\hat\epsilon}u^{+}_{i} = im\,(\theta^{+}\cdot\hat\epsilon^{+})\,u^{-}_{i}\,, \quad \delta_{\hat\epsilon}u^{-}_{i} = 0\,, \quad \delta_{\epsilon}u^{\pm}_{i} = 0\,. \tag{3.18}$$

Как обычно, $\theta^{\pm a} := \theta^{ia}u^{\pm}_{i}$, и т.д. Легко проверить, что

$$\delta\theta^{+a} = \epsilon^{+a} - i\frac{m}{2}(\theta^{+})^2\hat\epsilon^{-a}\,, \tag{3.19}$$

т.е. θ^{+a} уже обладает аналитическим законом преобразования (в преобразованиях нет θ^{-a}). Однако, в преобразовании $\hat\theta^{+a}$ появляются θ^{-a} и $\hat\theta^{-a}$, поэтому необходимо определить спинорный мост к аналитическому базису. Это сделать довольно просто:

$$\tilde\theta^{+a} = \hat\theta^{+a} + i\frac{m}{2}\,\theta^{-a}\,(\hat\theta^{+})^2\,, \quad (\hat\theta^{+})^2 = (\tilde\theta^{+})^2\,. \tag{3.20}$$

Эта новая координата имеет следующий закон преобразования

$$\delta\tilde\theta^{+a} = \hat\epsilon^{+a} - im\left[(\tilde\theta^{+}\cdot\theta^{+})\hat\epsilon^{-a} - \frac{1}{2}(\tilde\theta^{+})^2\epsilon^{-a}\right]. \tag{3.21}$$

Мы также введем аналитические бозонные координаты

$$x_A^{(++)} = x^{(++)} + i\theta^+ \cdot \theta^- \,, \quad x_A^{(--)} = x^{(--)} + i\tilde{\theta}^+ \cdot \hat{\theta}^- + \frac{m}{2}(\tilde{\theta}^+)^2(\hat{\theta}^- \cdot \theta^-). \tag{3.22}$$

можно проверить, что они обладают аналитическими законами преобразования

$$\delta x_A^{(++)} = 2i\theta^+ \cdot \epsilon^- \,, \quad \delta x_A^{(--)} = 2i\tilde{\theta}^+ \cdot \hat{\epsilon}^- \,. \tag{3.23}$$

Таким образом, координатный набор

$$(\zeta, u^\pm) = (x_A^{(\pm\pm)}, \theta^{+a}, \tilde{\theta}^{+a}, u_i^\pm) \tag{3.24}$$

образует $SU(2|2)$ аналитическое суперпространство. Мера интегрирования в этом суперпространстве

$$\mu_A^{-4} := d^2x_A d^2\theta^+ d^2\tilde{\theta}^+ du \tag{3.25}$$

преобразуется следующим образом

$$\delta\mu_A^{-4} = \mu_A^{-4}(\partial^{--}w^{++} - \partial_{+a}\delta\theta^{+a} - \tilde{\partial}_{+a}\delta\tilde{\theta}^{+a}) = im\,\mu_A^{-4}\,(\tilde{\theta}^+ \cdot \epsilon^- - \theta^+ \cdot \hat{\epsilon}^-)\,. \tag{3.26}$$

Для полноты, мы также приведем преобразования неаналитических координат:

$$\begin{aligned}
\delta\theta^{-a} &= \epsilon^{-a} + im\left[\theta^{+a}\,(\theta^- \cdot \hat{\epsilon}^-) + \frac{1}{2}\,(\theta^-)^2\,\hat{\epsilon}^{+a}\right], \\
\delta\hat{\theta}^{-a} &= \hat{\epsilon}^{-a}\left[1 - i\frac{m}{2}(\tilde{\theta}^+ \cdot \theta^- + \hat{\theta}^- \cdot \theta^+) - \frac{m^2}{4}(\theta^-)^2(\tilde{\theta}^+)^2\right] \\
&\quad - im\left[(\hat{\theta}^{-(a} \cdot \theta^{+d)} - \tilde{\theta}^{+(a} \cdot \theta^{-d)})\,\hat{\epsilon}_d^- - (\hat{\theta}^- \cdot \theta^-)\,\hat{\epsilon}^{+a}\right].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Для дальнейшей работы нам также понадобятся вид ковариантных производных (3.9) в аналитическом базисе (3.24)

$$\hat{\mathcal{D}}_a^+ = -\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}^{-a}}, \quad \hat{\mathcal{D}}_a^- = (\delta_a^b - im\theta^{-b}\hat{\theta}_a^+)\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}^{+b}} + 2i\hat{\theta}_a^-\partial_{A(--)},$$

$$\mathcal{D}_a^+ = -\frac{\partial}{\partial\theta^{-a}} + im\hat{\theta}_a^-\hat{\theta}^{+c}\hat{\mathcal{D}}_c^+ + im(\hat{\theta}_a^- u_i^+ u_j^+ T^{ij} - \hat{\theta}_a^+ u_{(i}^+ u_{j)}^- T^{ij} - \epsilon_{a(b}\hat{\theta}_{c)}^+ T^{bc}),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a^- = \frac{\partial}{\partial\theta^{+a}} + im\hat{\theta}^{-c}\hat{\theta}_a^+\hat{\mathcal{D}}_c^- - \frac{im}{2}(\hat{\theta}^-)^2\hat{\mathcal{D}}_a^+ + im(\hat{\theta}_a^- u_{(i}^+ u_{j)}^- T^{ij} - \hat{\theta}_a^+ u_i^- u_j^- T^{ij} - \epsilon_{a(b}\hat{\theta}_{c)}^- T^{bc}) + \\
+2i\theta_a^-\partial_{A(++)} - m(\hat{\theta}^-)^2\hat{\theta}_a^+\partial_{A(--)}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Здесь мы использовали $\hat{\theta}^{+a}$ вместо $\tilde{\theta}^{+a}$ для сокращения записи, подразумевая зависимость

$\hat\theta^{+a}$ от $\tilde\theta^{+a}$ и θ^{-a}, которую легко увидеть из (3.20), т.е.

$$\hat\theta^{+a} = \tilde\theta^{+a} - i\frac{m}{2}\,\theta^{-a}(\tilde\theta^{+})^2\,.$$

Играющие важную роль в гармоническом суперпространстве гармонические производные

$$\partial^{\pm\pm} = u_i^{\pm}\frac{\partial}{\partial u_i^{\mp}}, \quad \partial_u^0 = u_i^{+}\frac{\partial}{\partial u_i^{+}} - u_i^{-}\frac{\partial}{\partial u_i^{-}}, \tag{3.29}$$

в базисе (3.24) имеют следующий вид

$$\mathcal{D}^{++} = \partial^{++} + i(\theta^+)^2\partial_{A(++)} + i(\tilde\theta^+)^2\partial_{A(--)} + \theta^{+a}\frac{\partial}{\partial\theta^{-a}} + \hat\theta^{+a}\frac{\partial}{\partial\hat\theta^{-a}} + \frac{im}{2}\theta^{+a}(\tilde\theta^+)^2\frac{\partial}{\partial\tilde\theta^{+a}},$$

$$\mathcal{D}^{--} = \partial^{--} + i(\theta^-)^2\partial_{A(++)} + i(\hat\theta^-)^2\partial_{A(--)} + \theta^{-a}\frac{\partial}{\partial\theta^{+a}} + (\hat\theta^{-a} + im\theta^{-a}(\hat\theta^+\cdot\hat\theta^-))\frac{\partial}{\partial\tilde\theta^{+a}},$$

$$\mathcal{D}_u^0 = \partial_u^0 + \theta^{+a}\frac{\partial}{\partial\theta^{+a}} + \tilde\theta^{+a}\frac{\partial}{\partial\tilde\theta^{+a}} - \theta^{-a}\frac{\partial}{\partial\theta^{-a}} - \hat\theta^{-a}\frac{\partial}{\partial\hat\theta^{-a}}. \tag{3.30}$$

Коммутаторы гармонический производных друг с другом и с ковариантными производными имеют стандартный вид

$$[\mathcal{D}_u^0, \mathcal{D}^{\pm\pm}] = \pm 2\mathcal{D}^{\pm\pm}, \quad [\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^{--}] = \mathcal{D}_u^0,$$

$$[\mathcal{D}^{++}, \hat{\mathcal{D}}_a^-] = \hat{\mathcal{D}}_a^+, \quad [\mathcal{D}^{--}, \hat{\mathcal{D}}_a^+] = \hat{\mathcal{D}}_a^-, \quad [\mathcal{D}_u^0, \hat{\mathcal{D}}_a^\pm] = \pm\hat{\mathcal{D}}_a^\pm,$$

$$[\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}_a^-] = \mathcal{D}_a^+, \quad [\mathcal{D}^{--}, \mathcal{D}_a^+] = \mathcal{D}_a^-, \quad [\mathcal{D}_u^0, \mathcal{D}_a^\pm] = \pm\mathcal{D}_a^\pm. \tag{3.31}$$

Учитывая тот факт, что гармоники $u_i^\pm$ преобразуются нетривиальным образом при преобразованиях суперсимметрии, вариации гармонических производных также нетривиальны

$$\delta\mathcal{D}_u^0 = 0, \quad \delta\mathcal{D}^{++} = -im(\hat\epsilon^+\cdot\theta^+)\mathcal{D}_u^0. \tag{3.32}$$

Эти свойства нам потребуются в дальнейшем.

4 Суперполевое действие

Рассмотрим суперполе q^+ со следующими условиями аналитичности

$$\mathcal{D}_a^+ q^+ = \hat{\mathcal{D}}_a^+ q^+ = 0, \tag{4.1}$$

Учитывая явный вид ковариантных производных $\mathcal{D}_a^+$ и $\hat{\mathcal{D}}_a^+$ и отсутствие дублетных индексов у q^+, находим, что суперполе определено в подпространстве (3.24) и имеет следующий вид в компонентом разложении

$$q^+ = A^+(x,u) + \psi^a(x,u)\theta^+_a + \chi^a(x,u)\tilde{\theta}^+_a + B^-_1(x,u)(\theta^+)^2 + B^-_2(x,u)(\tilde{\theta}^+)^2 + B^-_{ab}(x,u)\theta^{+a}\tilde{\theta}^{+b} +$$

$$+\psi^{(-2)a}(x,u)(\tilde{\theta}^+)^2\theta^+_a + \chi^{(-2)a}(x,u)(\theta^+)^2\tilde{\theta}^+_a + C^{(-3)}(x,u)(\theta^+)^2(\tilde{\theta}^+)^2. \qquad (4.2)$$

При построении суперполевого действия необходимо принять во внимание не инвариантность меры интегрирования (3.26) в аналитическом подпространстве (3.24).

$$S = \int \mu_A^{-4} L \Rightarrow \delta S = \int (\delta\mu_A^{-4} L + \mu_A^{-4}\delta L), \qquad (4.3)$$

следовательно, требование инвариантности действия относительно преобразований суперсимметрии накладывает ограничения на возможные вариации лагранжиана, а именно

$$\delta L = im\,(\theta^+ \cdot \hat{\epsilon}^- - \tilde{\theta}^+ \cdot \epsilon^-)L. \qquad (4.4)$$

Теперь мы можем перейти к рассмотрению простейших лагранжианов.

4.1 Лагранжиан

Рассмотрим теперь лагранжиан

$$L = \bar{q}^+(\mathcal{D}^{++} + \frac{m}{2}\theta^+ \cdot \tilde{\theta}^+)q^+ - q^+(\mathcal{D}^{++} - \frac{m}{2}\theta^+ \cdot \tilde{\theta}^+)\bar{q}^+, \qquad (4.5)$$

Теперь, для того чтобы добиться правильного закона преобразования (4.4) будем искать δq^+ в следующем виде

$$\delta q^+ = \Lambda q^+ + iBq^+, \qquad (4.6)$$

т.е. конформный фактор Λ ($\bar{\Lambda} = \Lambda$) и фазовый фактор B ($\bar{B} = B$), после не сложных преобразований найдем

$$\delta q^+ = \frac{im}{2}(\hat{\epsilon}^- \cdot \theta^+ - \epsilon^- \cdot \tilde{\theta}^+)q^+ - m(\hat{\epsilon}^- \cdot \theta^+ + \epsilon^- \cdot \tilde{\theta}^+)q^+. \qquad (4.7)$$

Соответствующее уравнение движения для суперполя q^+

$$\mathcal{D}^{++}q^+ + \frac{m}{2}\theta^+ \cdot \tilde{\theta}^+ q^+ = 0. \qquad (4.8)$$

Решая это уравнение найдем компонентное разложения q^+

$$q^+ = f^i u^+_i + \psi^a\theta^+_a + \chi^a\tilde{\theta}^+_a - i\partial_{A(++)} f^i u^-_i(\theta^+)^2 - i\partial_{A(--)} f^i u^-_i(\tilde{\theta}^+)^2 - \frac{im}{2} f^i u^-_i \theta^+ \cdot \tilde{\theta}^+, \quad (4.9)$$

а компонентное разложение лагранжиана (4.5) выглядит следующим образом

$$L = \partial_{A(++)} f^i \partial_{A(--)} \bar{f}^i + \frac{i}{2} \psi^a \partial_{A(--)} \psi_a + \frac{i}{2} \chi^a \partial_{A(++)} \chi_a - \frac{im}{4} \psi^a \chi_a - \frac{m^2}{16} f^i \bar{f}_i. \qquad (4.10)$$

Соответствующие уравнения движения для физических полей

$$\partial_{A(++)} \chi^a - \frac{m}{4} \psi^a = 0, \quad \partial_{A(--)} \psi^a - \frac{m}{4} \chi^a = 0,$$

$$\partial_{A(++)} \partial_{A(--)} f^i + \frac{m^2}{16} f^i = 0. \qquad (4.11)$$

Они инвариантны относительно следующих преобразований суперсимметрии

$$\delta \psi^a = -2i \partial_{A(++)} f^i \epsilon_i^a - \frac{im}{2} f^i \hat{\epsilon}_i^a, \quad \delta \chi^a = -2i \partial_{A(--)} f^i \hat{\epsilon}_i^a + \frac{im}{2} f^i \epsilon_i^a,$$

$$\delta f^i = -\psi^a \epsilon_a^i - \chi^a \epsilon_a^i. \qquad (4.12)$$

Легко проверить, что замыкания этих преобразований образуют группу $SU(2|2)$

$$[\delta_1, \delta_2] f^i \sim -2i\alpha \partial_{A(++)} f^i - 2i\beta \partial_{A(--)} f^i + \lambda_j^i f^j, \qquad (4.13)$$

для фермионных полей ψ^a и χ^a аналогично, только необходимо дополнительно использовать уравнения движения.

5 Заключение

Данная работа является очередным шагом к получению суперполевой формулировки теории суперструны на пространстве $AdS_3 \times S^3$. Воспользовавшись стандартной процедурой Картана мы получили суперпространство, наиболее подходящее для описание систем обладающих 2d суперсимметрией основанных на супергруппе $SU(2|2)$, одной из которых и является теория суперструны на $AdS_3 \times S^3$. Отличительной особенностью данного суперпространства являлся нетривиальный закон преобразования гармоник $u_i^{\pm}$, повлекший за собой не инвариантность аналитической меры и ограничения на возможные преобразования суперполевого лагранжиана. Мы также нашли простейший пример лагранжиана, обладающего необходимыми свойствами и показали, что он описывает массивный супермультиплет (4,4,0). А замыкания (4.12) образуют группу $SU(2|2)$.

Список литературы

[1] M.B Green and J.H. Shwarz, "Properties of the covariant formulations of superstring theories", Nucl. Phys. B **243**, 285 (1984).

[2] R.R. Metsaev and A.A. Tseytlin, "Type IIB superstring action in $AdS(5) \times S(5)$ background", Nucl. Phys. B **533**, 109 (1998) arXiv:hep-th/9805028.

[3] M. Grigoriev and A.A. Tseytlin, "Pohlmeyer reduction of $AdS_5 \times S^5$ superstring sigma model", Nucl. Phys. B **800**, 450 (2008) arXiv:0711.0155 [hep-th].

[4] A. Mikhailov and S. Schafer-Nameki, "Sine-Gordon-like action for the superstring in $AdS_5 \times S^5$", JHEP **0805**, 075 (2008) arXiv:0711.0195 [hep-th].

[5] K. Pohlmeyer, "Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints", Commun. Math. Phys. **46**, 207 (1976).

[6] M. Grigoriev and A.A. Tseytlin, "On reduced models for superstrings on $AdS_n \times S^n$", Int. J. Mod. Phys. A **23**, 2107 (2008) arXiv:0806.2623 [hep-th].

[7] I. Bakas, Q.H. Park and H.J. Shin, "Lagrandian formulation of symmetric space sine-Gordon models", Phys. Lett. B **372**, 45 (1996) arXiv:hep-th/9512030.

[8] M. Goykhman and E. Ivanov, "Worldsheet supersymmetry of Pohlmeyer-reduced $AdS_n \times S^n$ superstrings", JHEP **1109**, 078 (2011) arXiv:1104.0706 [hep-th].

[9] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky and E. Sokatchev, "Harmonic Superspace", Cambridge University Press 2011, 306p.

[10] E. Ivanov and O. Lechtenfeld, "N=4 Supersymmetric Mechanics in Harmonic Superspace", JHEP **0309**, 073 (2003), arXiv:hep-th/0307111.

[11] E. Ivanov and A. Sutulin, "Sigma models in (4,4) Harmonic Superspace", Nucl. Phys. B **432**, 246 (1994), arXiv:hep-th/9404098.

[12] T.J. Hollowood and J.L. Miramontes, "The $AdS_5 \times S^5$ Semi-Symmetric Space Sine-Gordon Theory", JEHP **1105**, 136 (2011) arXiv:1104.2429 [hep-th].

[13] V. Bychkov and E. Ivanov , "N=4 Supersymmetric Landau Models", Nucl. Phys. B **863**, 33 (2012) arXiv:1202.4984 [hep-th].