

Московский ордена Трудового Красного Знамени
физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра физики взаимодействия частиц высоких энергий
Объединенный институт ядерных исследований
Учебно-научный центр

Дербышев А.Е.

Полностью асимметричный процесс с
исключением с обобщенным правилом
обновления

Магистерская диссертация

Научные руководители
д.ф.-м.н. ПРИЕЗЖЕВ В.Б.
к.ф.-м.н. ПОВОЛОЦКИЙ А.М.

Рецензент
к.ф.-м.н. ПЯТОВ П.Н.

Дубна Июнь 2013

Содержание

Введение	2
0.1 TASEP	2
0.2 Правила обновления	3
0.3 Цель работы	4
1 Формулировка модели	5
2 Определения	6
2.1 Гильбертово пространство	7
2.2 Оператор эволюции	7
2.3 Собственные вектора	8
3 Решение основного уравнения	9
3.1 Случай $N = 2$	9
3.1.1 Бете-анзац	9
3.1.2 Диссоциация пар	10
3.2 Случай произвольного N	12
3.2.1 Бете анзац	12
3.2.2 Переход к бесконечной решетке	14
3.2.3 Функция Грина	15
Заключение	16
А Доказательство двухчастичной приводимости	17
A.1 Случай $N = 3$	17
A.2 Случай произвольного N	19
Литература	22

Введение

Точнорешаемые модели имеют важное значение в статистической физике, анализ свойств решений таких моделей оказался черезвычайно полезным для понимания поведения сложных реальных систем. Несмотря на относительную простоту (чаще всего рассматриваются одно- или двумерные модели) они позволяют изучать широкий спектр вопросов, связанных с фазовыми переходами, таких как основные состояния различных фаз, природа фазовых переходов, спектр возбуждения, корреляционные функции, параметры порядка, влияние конечных размеров и т.д.

0.1 ТASEP

Полностью асимметричный простой процесс исключения (TASEP) одна из важнейших точнорешаемых моделей стохастической системы взаимодействующих частиц, демонстрирующих неравновесное поведение [1–3]. Впервые модель была предложена американским биологом Макдональдом для моделирования динамики синтеза РНК на поверхности рибосом в 1968 году. В настоящее время модель используется в широком круге задач: моделирование транспортного, биофизического, информационного трафика, процессов роста поверхностей и многие другие. Модель формулируется следующим образом: N частиц, движущиеся слева направо на одномерной решетке. В каждый момент времени каждый узел решетки может быть занят не более чем одной частицей. Для конечного числа ча-

стиц динамика в дискретном времени может быть определена с помощью основного уравнения

$$P(X, t + 1) = \sum_{X'} T(X, X') P(X', t), \quad (1)$$

где компоненты N -мерного вектора $X = x_i (x_1 < x_2 < \dots < x_n)$ являются позициями N частиц и $T(X, X')$ вероятность перехода за один шаг из конфигурации X' в конфигурацию X . Повторяя (1), получаем решение основного уравнения для любой заданной начальной конфигурации X^0 , то есть условную вероятность найти частицу в конфигурации X на шаге по времени T , учитывая, что процесс начался с конфигурации X^0 .

0.2 Правила обновления

Динамика TASEP характеризуется одним из возможных правил обновления [4], то есть очередностью по которой частицам предоставляется возможность совершить скачок в следующую ячейку. Наиболее интересны случаи обратного последовательного, параллельного, параллельного подрешеточного и случайного последовательного обновления. Первые два из них исследованы более подробно, чем другие.

- 1 . Обратное последовательное обновление: каждая частица может сделать один шаг вправо с заданной вероятностью, если узел свободен в начале шага по времени или становится свободным в конце шага по времени из-за движения передней частицы.
- 2 . Параллельное обновление: каждая частица может сделать один шаг вправо с заданной вероятностью, если узел свободен в начале шага по времени.
- 3 . Параллельное подрешеточное обновление: по очереди обновляются

все четные затем нечетные частицы по правилу обратного последовательного обновления.

4 . Случайное последовательное обновление: на каждом шаге по времени частица выбирается случайно с вероятностью $1/N$ и может сделать один шаг вправо с заданной вероятностью, если узел свободен.

Общим свойством указанных выше правил обновления является короткий диапазон отталкивания между частицами за счет условия исключения . Второе важное свойство указанных обновлений "разрешимость" , что означает что основное уравнение (1) может быть решено с помощью метода Бете-анзаца и функция Грина может быть вычислена в явном виде [9, 10].

0.3 Цель работы

В последние два десятилетия исследованы многие свойства и обобщения модели, такие как эволюция плотности частиц в больших масштабах [5], колебания плотности и тока [6–8], распределение вероятности позиции последней частицы, обобщение на случай нескольких типов частиц, вероятности прыжка зависящей от времени, вероятности прыжка зависящей от номера частицы.

В данной работе предложено обобщение правил обновления для того, чтобы изменить первое свойство, сохраняя второе. А именно, кроме условия исключения, вводится взаимодействие между соседними частицами, которое меняет эволюцию системы коренным образом. При этом сохраняется разрешимость уравнения (1).

В частности, вводится контролирующий параметр во взаимодействие

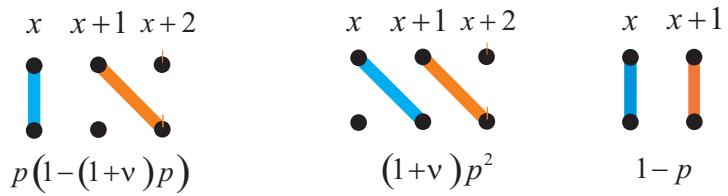


Рис. 1.1: Вероятности различных скачков двумя соседними частицами.

между частицами. В зависимости от его значения мы получаем притяжение или дополнительное отталкивание. Рассматривается TASEP на бесконечной одномерной решетке в дискретном времени и решается основное уравнение при произвольных начальных условиях, чтобы найти функцию Грина в детерминантной форме, как это было сделано в [11–13]. Решение обобщает известные результаты для обратного последовательного и параллельного обновления и совпадает с ними для конкретных значений параметров взаимодействия.

Глава 1

Формулировка модели

Рассмотрим N частиц, движущихся слева направо на одномерной решетке. В каждый дискретный момент времени, каждый узел решетки может быть занят не более чем одной частицей. Для описания динамики модели мы следуем правилу обратного последовательного обновления : в данный момент времени мы изучаем конфигурацию частиц справа налево и рассматриваем ситуации, когда две частицы встречаются в соседних узлах перед очередным шагом по времени (см.рис.1.1). Если пра-

вая частица пара не прыгает на данном шаге, левая частица остается на своей позиции с вероятностью 1. Если правая частица прыгает, следующая частица перехит вправо с вероятностью $(1 + \nu)p$, или стоит с вероятностью $1 - (1 + \nu)p$. Естественное ограничение на параметр ν дает $0 \leq (1 + \nu) \leq 1/p$. При $\nu = 0$, у нас есть обычный TASEP с обратным последовательным обновлением. При $\nu = -1$, получаем TASEP с параллельным обновлением.

Если $\nu > 0$, система демонстрирует коллективное поведение, которое является довольно типичным для автомобильного движения. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим предельный случай $\nu = 1, p = 1/2$. Изолированные частицы двигаются вперед с вероятностью $p = 1/2$. Если две частицы оказываются ближайшими соседями, они становятся "склеены" и двигаться синхронно, потому что ситуация, когда правая движется частица , а левая стоит запрещена. Эта микро-пробка растет, вовлекая в себя все новые и новые частицы до момента, когда все частицы движутся синхронно в огромной N -частичной пробке. Таким образом, при изменении параметра ν от -1 до $(1/p - 1)$ система проходит через качественное изменение поведения плотности частиц: от разрежения до слипания. Два типичных примера такого поведения показаны на рис. (1.2)

Глава 2

Определения

Начнем решение задачи с нескольких определений.

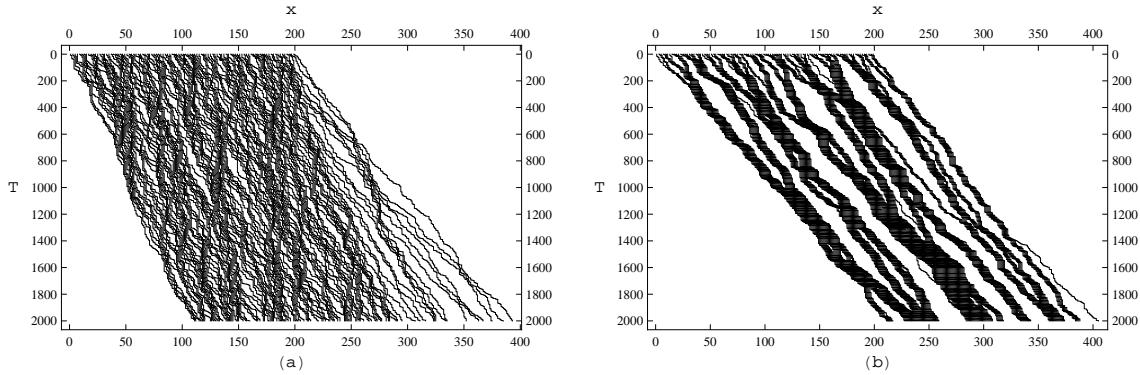


Рис. 1.2: Типичное поведение пространственно временных траекторий частиц на (а) режим разрежения, $c = 0, 1$, $\nu = -1$, и (б) режим образования пробок, $c = 0, 1$ и $\nu = 8.95$. Динамика $N = 100$ частиц моделируется для $T = 2000$ шагов по времени, начиная с конфигурации, в которой частицы чередуются с пустыми ячейками.

2.1 Гильбертово пространство

Введем гильбертово пространство с полным базисом правых и левых собственных векторов, состоящим из векторов $\langle X |$ и $| X \rangle$ соответственно с внутренним произведением

$$\langle X | X' \rangle = \delta(X, X'). \quad (2.1)$$

где X N -мерный вектор задающий координаты частиц. Состояние системы в любой момент времени может быть связано с вектором состояний

$$| P_t \rangle = \sum_{\{X\}} P_t(X) | X \rangle, \quad (2.2)$$

где суммирование происходит по всем конфигурациям частиц.

2.2 Оператор эволюции

В терминах векторов состояния кинетическое уравнение (1) принимает простую операторную форму

$$| P_{t+1} \rangle = \mathbf{T} | P_t \rangle, \quad (2.3)$$

где оператор эволюции \mathbf{T} определен через вероятность перехода

$$\mathbf{T} = \sum_{\{X\},\{X'\}} |X\rangle T(X, X') \langle X'| . \quad (2.4)$$

Условная вероятность $P(X, t|X^0, 0)$ может быть представлена в виде матричного элемента

$$P(X, t|X^0, 0) = \langle X| \mathbf{T}^t |X^0\rangle . \quad (2.5)$$

2.3 Собственные векторы

Чтобы вычислить матричный элемент, конструируем набор левых собственных векторов $|B_Z\rangle$ оператора \mathbf{T}

$$\mathbf{T}|B_Z\rangle = \Lambda(Z)|B_Z\rangle \quad (2.6)$$

и вспомогательный набор правых собственных векторов $\langle \bar{B}_Z|$

$$\langle \bar{B}_Z| \mathbf{T} = \Lambda(Z) \langle \bar{B}_Z| , \quad (2.7)$$

где Z N -мерный параметр. Теперь вероятность перехода (2.5) может быть сведена к вычислению суммы

$$\langle X| \mathbf{T}^t |X^0\rangle = \sum_Z \langle X| \mathbf{T}^t |B_Z\rangle \langle \bar{B}_Z| X^0\rangle = \sum_Z \Lambda^t(Z) \langle X| B_Z \rangle \langle \bar{B}_Z| X^0\rangle , \quad (2.8)$$

где диапазон суммирования должны быть определены из граничных условий.

Глава 3

Решение основного уравнения

3.1 Случай $N = 2$

3.1.1 Бете-анзац

Чтобы понять особенность задачи на собственные вектора (2.6) в данном случае, рассмотрим сначала задачу для двух частиц. Если две частицы разделены по крайней мере двумя пустыми ячейками друг от друга, они двигаются независимо и уравнение (2.6) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} \Lambda(Z) \langle x_1, x_2 | B_Z \rangle &= \sum_{\{k_1, k_2\}} \prod_{i=1}^2 p^{k_i} (1-p)^{1-k_i} \\ &\times \langle x_1 - k_1, x_2 - k_2 | B_Z \rangle, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где суммирование идет по k_1, k_2 , которые принимают значения 1 или 0 в зависимости от того прыгает частица или нет. Если частицы находятся по соседству, $x_1 + 1 = x_2$, члены правой части уравнения для взаимодействующих частиц (2.6) имеют вид $p^2(1+\nu) \langle x_1 - 1, x_2 - 1 | B_Z \rangle$, $p(1-p) \langle x_1 - 1, x_2 | B_Z \rangle$, $(1-p) \langle x_1, x_2 | B_Z \rangle$, в то время как член $p(1-p) \langle x_1, x_2 - 1 | B_Z \rangle = p(1-p) \langle x_1, x_1 | B_Z \rangle$ в уравнении без взаимодействия (3.1) находится вне набора разрешенных конфигураций.

Стратегия Бете-анзаца состоит в том, чтобы определить формально

запрещенные члены через разрешенные таким образом, чтобы уравнение (2.6) сохранило свою "свободную" форму (3.1) в случае $x_1 + 1 = x_2$. Тогда формальная связь между запрещенными и разрешенными слагаемыми может быть использована для определения коэффициентов замены Бете.

$$\langle x_1, x_2 | B_Z \rangle = A_{12} z_1^{-x_1} z_2^{-x_2} + A_{21} z_2^{-x_1} z_1^{-x_2}. \quad (3.2)$$

Эта стратегия эффективна для TASEP с обратным последовательным обновлением. В данном случае (как и в случае параллельного обновления ([12])) возникает дополнительная проблема.

3.1.2 Диссоциация пар

Чтобы ее увидеть, рассмотрим конфигурацию $\{x_1, x_2\}$ где $x_1 + 2 = x_2$. Слагаемые правой части уравнения (2.6) $p^2 \langle x_1 - 1, x_2 - 1 | B_Z \rangle$, $p(1 - p) \langle x_1 - 1, x_2 | B_Z \rangle$, $(1 - p)^2 \langle x_1, x_2 | B_Z \rangle$ и $p(1 - (1 + \nu)p) \langle x_1, x_2 - 1 | B_Z \rangle$. Последний член отличается от своей свободной версии

$$p(1 - p) \langle x_1, x_2 - 1 | B_Z \rangle$$

и нет запрещенных слагаемых вида $p(1 - p) \langle x_1, x_1 | B_Z \rangle$, как в предыдущем параграфе, чтобы компенсировать эту разницу. Вместо этого заметим что конфигурация $\{x_1, x_2 - 1\}$ содержит пару соседствующих частиц, которая исчезает в конфигурации $\{x_1, x_2\}$. Поэтому, если доминировать вероятность перехода $T(X, X')$ на фактор $\lambda = (1 - p)/(1 - (1 + \nu)p)$, соответствующий диссоциации пары, восстанавливается свободная форма последнего слагаемого в правой части (3.1). В N -частичном случае, фактор λ следует приписать для каждой диссоциации пар.

Более формально определим вспомогательную матрицу

$$\mathbf{T}_0 = \mathcal{D} \mathbf{T} \mathcal{D}^{-1}$$

где \mathcal{D} диагональный оператор

$$\mathcal{D} = \sum_{\{X\}} \frac{|X\rangle\langle X|}{W(X)}.$$

и $W(X)$ зависит от числа пар $N_p(X)$ в конфигурации X : $W(X) = \lambda^{N_p(X)}$.

Операторы \mathbf{T} и \mathbf{T}_0 имеют одинаковые собственные значения Λ_Z и их правые собственные вектора связаны соотношением

$$|B_Z\rangle = \mathcal{D}^{-1} |B_Z^0\rangle. \quad (3.3)$$

Матричные элементы \mathbf{T}_0

$$T_0(X, X') = \frac{W(X')}{W(X)} T(X, X'). \quad (3.4)$$

Двучастичная задача на нахождение собственных векторов оператора \mathbf{T}_0 имеет форму как в случае невзаимодействующих частиц

$$\begin{aligned} \Lambda(Z) \langle x_1, x_2 | B_Z^0 \rangle &= \sum_{\{k_1, k_2\}} \prod_{i=1}^2 p^{k_i} (1-p)^{1-k_i} \\ &\times \langle x_1 - k_1, x_2 - k_2 | B_Z^0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.5)$$

если расстояние между частицами превышает 1. Если частицы являются соседями, $x_1 + 1 = x_2$, слагаемые правой части уравнения (3.5) $p^2(1 + \nu) \langle x_1 - 1, x_2 - 1 | B_Z^0 \rangle$, $p(1 - p)/\lambda \langle x_1 - 1, x_2 | B_Z^0 \rangle$, $(1 - p) \langle x_1, x_2 | B_Z^0 \rangle$ и $p(1 - p) \langle x_1, x_2 - 1 | B_Z^0 \rangle$ причем последний член запрещен в свободном уравнении. Накладывая условие

$$\begin{aligned} \langle x, x | B_Z^0 \rangle &= \frac{\nu p}{1-p} (\langle x - 1, x | B_Z^0 \rangle - \\ &- \langle x - 1, x + 1 | B_Z^0 \rangle) + \langle x, x + 1 | B_Z^0 \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

на запрещенное слагаемое, оставшиеся три слагаемые превращаются в свободные, обеспечивая правильность (3.5) для произвольных разрешенных конфигураций $\{x_1, x_2\}$.

3.2 Случай произвольного N

3.2.1 Бете анзац

Левые собственные вектора T

В приложении доказано что условия (3.6), записанного в общем виде

$$\begin{aligned} \langle \dots, x, x, \dots | B_Z^0 \rangle &= \frac{\nu p}{1-p} (\langle \dots, x-1, x, \dots | B_Z^0 \rangle - \\ &- \langle \dots, x-1, x+1, \dots | B_Z^0 \rangle) + \langle \dots, x, x+1, \dots | B_Z^0 \rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

достаточно, чтобы преобразовать общий N -частичный случай в свободный вид

$$\begin{aligned} \Lambda(Z) \langle x_1, \dots, x_N | B_Z^0 \rangle &= \sum_{\{k_i\}} \prod_{i=1}^N p^{k_i} (1-p)^{1-k_i} \\ &\times \langle x_1 - k_1, \dots, x_N - k_N | B_Z^0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

После этого ищем $B_Z^0(x_1, \dots, x_N)$ в виде подстановки Бете,

$$\langle x_1, \dots, x_N | B_Z^0 \rangle = \sum_{\{\sigma\}} A_{\sigma_1 \dots \sigma_N} z_{\sigma_1}^{-x_1} \dots z_{\sigma_N}^{-x_N}, \quad (3.9)$$

где параметр Z является набором N комплексных чисел $Z = \{z_1, \dots, z_N\}$.

Суммирование идет по всем перестановкам σ чисел $1, \dots, N$. Подстановка (3.9) в уравнение (3.8) приводит к собственным значениям:

$$\Lambda(Z) = \prod_{i=1}^N (1 - p + pz_i), \quad (3.10)$$

а подстановка (3.9) в ограничение (3.7) дает соотношение между амплитудами $A_{\sigma_1 \dots \sigma_N}$, которые отличаются между собой только перестановкой индексов

$$\frac{A_{\dots ij\dots}}{A_{\dots ji\dots}} = -\frac{1 - 1/z_i}{1 - 1/z_j} \frac{1 - \gamma z_j}{1 - \gamma z_i}. \quad (3.11)$$

где $\gamma = 1 - 1/\lambda$. Амплитуды $A_{\sigma_1 \dots \sigma_N}$ отдельно имеют вид

$$A_{\sigma_1 \dots \sigma_N} = (-1)^{\mathcal{P}(\{\sigma\})} \prod_{i=1}^N \left(-\frac{1 - \gamma z_{\sigma_i}}{1 - 1/z_{\sigma_i}} \right)^{i - \sigma_i}, \quad (3.12)$$

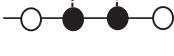
	T	T_0
	$p(1-p)$	$p(1-(1+\nu)p)$
	$p(1-(1+\nu)p)$	$p(1-p)$
	p^2	p^2
	$1-p$	$1-p$
	νp^2	νp^2

Рис. 3.1: Вероятность перехода для процессов определяемых операторами \mathbf{T} и \mathbf{T}_0 .

где $\mathcal{P}(\{\sigma\})$ — вероятность перестановки $\{\sigma\}$. Теперь можно написать элемент $\langle X | B_Z \rangle$ в (2.8).

Правые собственные векторы T

Чтобы найти $\langle \bar{B}_Z | X^0 \rangle$, нужно рассмотреть задачу о нахождении правых собственных векторов (2.7). Как и раньше начнем с двучастичного случая. Если $x_2 - x_1 \geq 2$, уравнение (2.7) эквивалентно уравнению

$$\Lambda(Z) \langle \bar{B}_Z | x_1, x_2 \rangle = \sum_{\{k_1, k_2\}} \prod_{i=1}^2 p^{k_i} (1-p)^{1-k_i} \times \langle \bar{B}_Z | x_1 + k_1, x_2 + k_2 \rangle. \quad (3.13)$$

где суммирование идет по k_1, k_2 , принимающим значения 1 или 0. Если $x_2 - x_1 = 1$, правая часть уравнения (2.7) содержит три слагаемых: $p^2(1+\nu) \langle \bar{B}_Z | x_1 + 1, x_2 + 1 \rangle$, $p(1-(1+\nu)p) \langle \bar{B}_Z | x_1, x_2 + 1 \rangle$ и $(1-p) \langle \bar{B}_Z | x_1, x_2 \rangle$. В то же время, правая часть уравнения (3.13) содержит четыре слагаемых, и одно из них, $p(1-p) \langle \bar{B}_Z | x_1 + 1, x_2 \rangle$, запрещено.

На рисунке 3.1 видно, что задача по нахождению собственных векторов оператора \mathbf{T} в случае двух частиц похожа, с точностью до инверсии координат на задачу по нахождению левых собственных векторов опе-

ратора \mathbf{T}_0 . Это верно для общего N -частичного случая, поэтому, можно использовать $\langle \bar{B}_Z | X \rangle$ в виде того же Бете-анзаца:

$$\langle \bar{B}_Z | X \rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\{\sigma\}} \bar{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_N} z_{\sigma_1}^{x_1} \dots z_{\sigma_N}^{x_N} \quad (3.14)$$

с амплитудами \bar{A}_σ , которые выражаются как

$$A_{\sigma_1 \dots \sigma_P} = 1/\bar{A}_{\sigma_1 \dots \sigma_N}$$

Собирая полученные выражения, получаем

$$\langle X | B_Z \rangle = W(X) \det \mathbf{B}, \quad (3.15)$$

$$\langle \bar{B}_Z | X \rangle = \frac{1}{N!} \det \bar{\mathbf{B}}, \quad (3.16)$$

где матричные элементы B_{ij} и \bar{B}_{ij} матриц \mathbf{B} и $\bar{\mathbf{B}}$

$$B_{ij} = 1/\bar{B}_{ij} = \left(-\frac{1 - \gamma z_j}{1 - 1/z_j} \right)^{i-j} z_j^{-x_i}. \quad (3.17)$$

Фактор $1/N!$ это нормировочная константа следующая из условия

$$\sum_Z \langle X | B_Z \rangle \langle \bar{B}_Z | X \rangle = 1. \quad (3.18)$$

3.2.2 Переход к бесконечной решетке

Область суммирования по Z определяется из граничных условий. В рассмотренном случае бесконечной решетки спектр непрерывный, поэтому сумма в (2.8) может быть записана в виде интеграла

$$\sum_Z \rightarrow \prod_{i=1}^N \oint_{\Gamma_{0,1}} \frac{dz_i}{2\pi i z_i}, \quad (3.19)$$

где каждый z_i пробегает по замкнутому контуру $\Gamma_{0,1}$ в комплексной плоскости вокруг точек $z = 0, 1$ и оставляет все остальные сингулярности снаружи. Выбор контура оправдывает требование полноты в том смысле,

что множество операторов $\{|B_Z\rangle \langle \bar{B}_Z| : Z \in \Gamma_{0,1}^N\}$ обеспечивает разложение единичного оператора

$$\sum_Z \langle X | B_Z \rangle \langle \bar{B}_Z | X' \rangle = \langle X | X' \rangle, \quad (3.20)$$

который был доказан в [12] для случая параллельного обновления. Доказательство в общем случае отличается только техническими деталями

3.2.3 Функция Грина

Явное выражение для условной вероятности $P(X, t | X^0, 0)$ следует из последовательной подстановки (3.17) в (3.16), затем (3.16) и (3.10) в (2.8) и (2.5).

$$\langle X | \mathbf{T}^t | X^0 \rangle = W(X) \sum_{\{\sigma\}} (-1)^{\mathcal{P}(\{\sigma\})} \prod_{i=1}^N F_{i-\sigma_i}(x_i - x_{\sigma_i}^0, t), \quad (3.21)$$

где функция F

$$F_n(x, t) = \oint_{\Gamma_{0,1}} \frac{dz}{2\pi i z} (1 - p + pz)^t \left(\frac{1 - \gamma z}{1 - 1/z} \right)^n z^{-x}. \quad (3.22)$$

Наконец, мы получаем функцию Грина в виде детерминанта матрицы \mathbf{M} [16]:

$$P(X, t | X^0, 0) = \lambda^{N_p(X)} \det \mathbf{M}, \quad (3.23)$$

с матричными элементами

$$M_{ij} = F_{i-j}(x_i - x_j^0, t). \quad (3.24)$$

Заключение

- 1 Были обобщены ранее изученные модели TASEP с обратным последовательным и параллельным обновлением.
- 2 Выполнено компьютерное моделирование, для некоторых значений параметров обнаружена тенденция к образованию кластеров частиц.
- 3 Несмотря на увеличение диапазона взаимодействия предложенная модель остается точнорешаемой.
- 4 Было получено точное выражение для функции Грина в детерминантной форме для предложенной новой модели.

В дальнейшем полученная функция Грина может быть использована для расчета корреляционных функций и распределения вероятности позиции последней частицы, которая имела вид распределения Трейси-Уидома [14, 15] в случае обратного последовательного обновления и па-

раллельного обновления .

Приложение А

Доказательство двучастичной приводимости

Докажем, что использование условия (3.7) решает проблемы с исключающим взаимодействием в свободном уравнении (3.8). На самом деле ниже мы приведем доказательство только для конкретного случая одного изолированного кластера частиц. При наличии нескольких кластеров, которые отстают более чем на один шаг друг от друга, они независимы, и это доказательство применяется для каждого кластера в отдельности. В принципе, нужно рассмотреть и случай кластеров, разделенных одним пустым местом. Однако технически это доказательство аналогично приведенному ниже, поскольку в этом случае не возникает новых запрещенных членов, и поэтому мы его опускаем.

A.1 Случай $N = 3$

Начнем решение задачи нахождения собственных векторов (3.8) со случая $N = 3$ трех частиц расположенных кластером $x_1 = x, x_2 = x+1, x_3 = x+2$:

$$\begin{aligned} \Lambda(Z) \langle x_1, x_2, x_3 | B_Z^0 \rangle &= \sum_{\{k_i\}} \prod_{i=1}^3 p^{k_i} (1-p)^{1-k_i} \\ &\times \langle x_1 - k_1, x_2 - k_2, x_3 - k_3 | B_Z^0 \rangle. \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

Нужно доказать что условие (3.7) превращает (A.1) в задачу нахождения собственных векторов оператора \mathbf{T}_0 . Правая часть (A.1) содержит четыре запрещенных члена $\langle x, x+1, x+1 | B_Z^0 \rangle$, $\langle x-1, x+1, x+1 | B_Z^0 \rangle$, $\langle x, x, x+2 | B_Z^0 \rangle$ и $\langle x, x, x+1 | B_Z^0 \rangle$. Используя простое расширение (3.6), определим два из них как

$$\begin{aligned} \langle x, x, x+2 | B_Z^0 \rangle &= \frac{\nu p}{1-p} (\langle x-1, x, x+2 | B_Z^0 \rangle - \\ &- \langle x-1, x+1, x+2 | B_Z^0 \rangle) + \langle x, x+1, x+2 | B_Z^0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \langle x-1, x+1, x+1 | B_Z^0 \rangle &= \frac{\nu p}{1-p} (\langle x-1, x, x+1 | B_Z^0 \rangle - \\ &- \langle x-1, x, x+2 | B_Z^0 \rangle) + \langle x-1, x+1, x+2 | B_Z^0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Для $\langle x, x+1, x+1 | B_Z^0 \rangle$ и $\langle x, x, x+1 | B_Z^0 \rangle$ имеем систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle x, x+1, x+1 | B_Z^0 \rangle = \frac{\nu p}{1-p} (\langle x, x, x+1 | B_Z^0 \rangle - \langle x, x, x+2 | B_Z^0 \rangle) + \\ + \langle x, x+1, x+2 | B_Z^0 \rangle \\ \langle x, x, x+1 | B_Z^0 \rangle = \frac{\nu p}{1-p} (\langle x-1, x, x+1 | B_Z^0 \rangle - \langle x-1, x+1, x+1 | B_Z^0 \rangle) + \\ + \langle x, x+1, x+1 | B_Z^0 \rangle \end{array} \right.$$

решая которую и используя (A.2) и (A.3), находим

$$\begin{aligned} \langle x, x+1, x+1 | B_Z^0 \rangle &= \frac{\nu^2 p^2}{(1-p)^2} (\langle x-1, x, x+1 | B_Z^0 \rangle - \\ &- \langle x-1, x, x+2 | B_Z^0 \rangle) + \langle x, x+1, x+2 | B_Z^0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

и

$$\begin{aligned} \langle x, x, x+1 | B_Z^0 \rangle &= \frac{\nu p}{1-p} (\langle x-1, x, x+1 | B_Z^0 \rangle - \\ &- \langle x-1, x+1, x+2 | B_Z^0 \rangle) + \langle x, x+1, x+2 | B_Z^0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Используя выражения для запрещенных членов (A.2), (A.3), (A.4) и (A.5), правые части которых состоят только из разрешенных членов,

можно переписать (A.1) в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_Z \langle X | B_Z^0 \rangle &= (1 + \nu)^2 p^3 \langle x - 1, x, x + 1 | B_Z^0 \rangle + \\ &+ q \langle x, x + 1, x + 2 | B_Z^0 \rangle + (1 + \nu)p^2(q - \nu p) \langle x - 1, x, x + 2 | B_Z^0 \rangle + \quad (\text{A.6}) \\ &+ p(q - \nu p) \langle x - 1, x + 1, x + 2 | B_Z^0 \rangle \end{aligned}$$

что в точности соответствует задаче отыскания собственных векторов оператора \mathbf{T}_0 для кластера $X = \{x, x + 1, x + 2\}$.

A.2 Случай произвольного N

Используя индукцию, аналогично обобщаем выражения для запрещенных членов (A.4) и (A.5) до M -частичного вида:

$$\begin{aligned} \langle x, x + 1, x + 2, \dots, x + N - 2, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle &= \\ &= \langle x, x + 1, x + 2, \dots, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle + \quad (\text{A.7}) \\ &+ \frac{\nu^{N-1} p^{N-1}}{(1-p)^{N-1}} \left(\langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + N - 2 | B_Z^0 \rangle - \right. \\ &\left. - \langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + N - 3, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, x, x + 1, \dots, x + N - 2 | B_Z^0 \rangle &= \\ &= \langle x, x + 1, x + 2, \dots, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle + \quad (\text{A.8}) \\ &+ \frac{\nu p}{1-p} \left(\langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + N - 2 | B_Z^0 \rangle - \right. \\ &\left. - \langle x - 1, x + 1, x + 2, \dots, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle \right). \end{aligned}$$

Для дальнейшего доказательства также воспользуемся индукцией. База индукции $N = 2$ была доказана ранее. Теперь покажем, что, используя

выражения для запрещенных членов , из равенства для N частиц :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_N=0}^1 p^{k_1}(1-p)^{1-k_1} p^{k_2}(1-p)^{1-k_2} \dots p^{k_N}(1-p)^{1-k_N} \times \\
& \langle x - k_1, x + 1 - k_2, \dots, x + N - 1 - k_N | B_Z^0 \rangle = \\
& = (1 + \nu)^{N-1} p^N \langle x - 1, x, \dots, x + N - 2 | B_Z^0 \rangle + \\
& (1 - p) \langle x, x + 1, \dots, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle + \\
& + \sum_{k=1}^{N-1} (1 + \nu)^{k-1} p^k (q - \nu p) \times \\
& \langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + k - 2, x + k, x + k + 1, \dots, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle
\end{aligned} \tag{A.9}$$

следует аналогичное равенство для $N + 1$ частиц

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_{N+1}=0}^1 p^{k_1}(1-p)^{1-k_1} p^{k_2}(1-p)^{1-k_2} \dots p^{k_{N+1}}(1-p)^{1-k_{N+1}} \times \\
& \langle x - k_1, x + 1 - k_2, \dots, x + N - k_{N+1} | B_Z^0 \rangle = \\
& = \sum_{k_{N+1}=0}^1 p^{k_{N+1}}(1-p)^{1-k_{N+1}} ((1 + \nu)^{N-1} p^N \times \\
& \langle x - 1, x, \dots, x + N - 2, x + N - k_{N+1} | B_Z^0 \rangle + \\
& (1 - p) \langle x, x + 1, \dots, x + N - 1, x + N - k_{N+1} | B_Z^0 \rangle + \\
& + \sum_{k=1}^N (1 + \nu)^{k-1} p^k (q - \nu p) \times \\
& \langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + k, x + k + 2, x + k + 3, \dots, x + N - 1, x + N - k_{N+1} | B_Z^0 \rangle).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Применяя выражения для запрещенных членов (A.7),(A.8) выводим

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_{N+1}=0}^1 p^{k_1}(1-p)^{1-k_1} p^{k_2}(1-p)^{1-k_2} \dots p^{k_{N+1}}(1-p)^{1-k_{N+1}} \times \\
& \langle x - k_1, x + 1 - k_2, \dots, x + N - k_{N+1} | B_Z^0 \rangle = \\
& = (1 + \nu)^{N-1} p^N [p \langle x - 1, x, \dots, x + N - 2, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle + \\
& + (1 - p) \langle x - 1, x, \dots, x + N - 2, x + N | B_Z^0 \rangle] + \\
& (1 - p) [(1 - p) \langle x, x + 1, \dots, x + N - 1, x + N | B_Z^0 \rangle + \\
& + p \langle x, x + 1, x + 2, \dots, x + N | B_Z^0 \rangle + \\
& \frac{\nu^N p^{N+1}}{(1-p)^N} (\langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle - \\
& - \langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + N - 2, x + N | B_Z^0 \rangle)] + \\
& + \sum_{k=1}^N (1 + \nu)^{k-1} p^k (q - \nu p) [(1 - p) \times \\
& \times \langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + k - 2, x + k, x + k + 1, \dots, x + N - 1, x + N | B_Z^0 \rangle + \\
& + \frac{1}{(1-p)^{N-k}} [\nu^{N-k} p^{N+1} (\langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle + \frac{p}{1-p} \times \\
& \times ((1 - p)^{N+1-k} p^k \langle x - 1, x, \dots, x + k - 2, x + k, x + k + 1, \dots, x + N | B_Z^0 \rangle) - \\
& - \nu^{N-k} p^N (1 - p) \langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + N - 2, x + N | B_Z^0 \rangle)])]
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Упростим выражения при различных слагаемых. Коэффициент перед слагаемым $\langle x - 1, x, \dots, x + N - 2, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle$

$$\begin{aligned}
& (1 + \nu)^{N-1} p^{N+1} + \frac{1}{(1-p)^{N-1}} (\nu^N p^{N+1}) + \sum_{k=1}^N (1 + \nu)^{k-1} \times \\
& \times (q - \nu p) \frac{1}{(1-p)^{N-k}} \nu^{N-k} p^{N+1} = p^{N+1} (1 + \nu)^N.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Коэффициент перед слагаемым $\langle x, x + 1, \dots, x + N - 1, x + N | B_Z^0 \rangle$

$$(1 - p)^2 + (1 - p) \frac{1}{(1 - p)^N} \frac{p}{1 - p} (1 - p)^{N+1} = 1 - p. \tag{A.13}$$

Коэффициент перед слагаемым $\langle x - 1, x, \dots, x + N - 2, x + N | B_Z^0 \rangle$

$$\begin{aligned}
& (1 + \nu)^{N-1} p^N (1 - p) - \frac{\nu^N p^{N+1}}{(1-p)^{N-1}} - p^{N+1} \sum_{k=1}^{N-1} (1 + \nu)^{k-1} \times \\
& \times (q - \nu p) \frac{1}{(1-p)^{N-k}} \nu^{N-k} = p^N (1 + \nu)^{N-1} (q - \nu p)
\end{aligned} \tag{A.14}$$

и коэффициент перед слагаемым $\langle x - 1, x, \dots, x + k - 2, x + k, x + k + 1, \dots, x + N | B_Z^0 \rangle$

$$\frac{(1 + \nu)^{k-1}}{(1 - p)^{N-k}}(q - \nu p)p^k\left(1 + \frac{p}{1 - p}\right) = \frac{(1 + \nu)^{k-1}}{(1 - p)^{N+1-k}}(q - \nu p)p^k \quad (\text{A.15})$$

Суммируя все слагаемые для $N + 1$ частиц, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \dots \sum_{k_{N+1}=0}^1 p^{k_1}(1-p)^{1-k_1}p^{k_2}(1-p)^{1-k_2} \dots p^{k_{N+1}}(1-p)^{1-k_{N+1}} \times \\ & \times \langle x - k_1, x + 1 - k_2, \dots, x + N - k_N | B_Z^0 \rangle = \\ & (1 + \nu)^N p^{N-1} \langle x - 1, x, \dots, x + N - 1 | B_Z^0 \rangle + \\ & + (1 - p) \langle x, x + 1, \dots, x + N | B_Z^0 \rangle + \sum_{k=1}^N (1 + \nu)^{k-1} p^k (q - \nu p) \times \\ & \times \langle x - 1, x, x + 1, \dots, x + k - 2, x + k, x + k + 1, \dots, x + N | B_Z^0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Условие выполняется для $N + 1$. Следовательно предположение верно и использование условия (3.7) достаточно для выполнения условия (3.8).

Литература

1. Spohn H, 1991 *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, (Berlin: Springer).
2. Liggett T M, 1999 *Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes* (Berlin: Springer)
3. Schütz G M, *Solvable models for many-body systems far from equilibrium*. In Domb C and Lebowitz J. (eds.) 2001 *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol.19 (London: Academic, pp. 1–251)

4. Rajewsky N, Santen L, Schadenschneider A and Schreckenberg M, *The Asymmetric Exclusion Process: Comparison of Update Procedures*, 1998 *J. Stat. Phys.* **92** 151–194
5. Rost H, 1981 *Probability Theory and Related Fields* **58** 41–53
6. Derrida B, 2007 *J. Stat. Mech.* P07023
7. Prähofer M and Spohn H, 2002 *In and Out of Equilibrium (Progress in Probability vol 51)*, ed V Sidoravicius , (Boston, MA: Birkhäuser) pp 185–204
8. Ben Arous G and Corwin I, *Current fluctuations for TASEP: A proof of the Prähofer-Spohn conjecture*, 2011 *Ann. Probab.* **39** 104–138
9. Gwa L H and Spohn H, *Six-vertex model, roughened surfaces, and an asymmetric spin Hamiltonian*, 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 725
10. Schütz G M, *Exact solution of the master equation for the asymmetric exclusion process*, 1997 *J. Stat. Phys.* **88** 427
11. Brankov J G, Priezzhev V B and Shelest R V, *Generalized determinant solution of the discrete-time totally asymmetric exclusion process and zero-range process*, 2004 *Phys. Rev. E* **69** 066136
12. A. M. Povolotsky, V. B. Priezzhev, *Determinant solution for the Totally Asymmetric Exclusion Process with parallel update*, 2006 *J. Stat. Mech.* P07002
13. Poghosyan S S, Priezzhev V B and Schütz G M, *Green functions for the TASEP with sublattice parallel update*, 2010 *J. Stat. Mech.* P04022
14. Johansson K, *Shape Fluctuations and Random Matrices*, 2000 *Comm. Math. Phys.* **209** 437

15. Rákos A and Schütz G M, *Current Distribution and Random Matrix Ensembles for an Integrable Asymmetric Fragmentation Process*, 2005 *J. Stat. Phys.* **118** 511
16. A. E. Derbyshev, S. S. Poghosyan, A. M. Povolotsky, V. B. Priezzhev, *The totally asymmetric exclusion process with generalized update*, 2012 *J. Stat. Phys.* P05014