

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

факультет Общей и Прикладной Физики
кафедра "Фундаментальные и прикладные проблемы физики микромира"

Квалификационная выпускная работа на соискание степени бакалавра

студента 424д группы Кожанова И.В.

Алгебраические методы исследования стохастических процессов.

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук Пятов П.Н.

Дубна
2008

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в связи с обнаружением комбинаторных свойств ХХЗ-цепочки (см. [1]) возрос интерес к стохастической модели RPM (связь RPM модели и ХХЗ-цепочки (см. [6]), в которой была обнаружена довольно интересная комбинаторика (см. [2]-[6]). В данной работе найдены новые комбинаторные свойства этой модели. Исследованы волновые функции основного состояния для гамильтониана $H_L^{(a)} = a(1 - e_1) + \sum_{i=2}^{L-1} (1 - e_i)$, что соответствует более активному (пассивному) падению ромбика в первый узел (более активному (пассивному) вращению спина в узле). Получены общие формулы для частичных сумм.

В части [2] описана модель и ее связь с алгеброй Темперли-Либа. Затем (часть [3]) даны определения для частичных сумм и рассказано о соотношении шестиугольника Паскаля (часть [4]). В пятой части написаны результаты- детерминантная формула для частичных сумм. В приложении можно ознакомиться с волновыми функциями (и полученными из них частичными суммами) которые являлись основой для получения детерминантной формулы.

2. МОДЕЛЬ RPM И АЛГЕБРА ТЕМПЕРЛИ-ЛИБА.

Рассмотрим одномерную решетку с $(L + 1)$ узлом. К поверхности которой прикрепляются неотрицательные целые числа h_i , которые подчиняются следующим правилам:

$$h_{i+1} - h_i = \pm 1, \quad h_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, L. \quad (2.1)$$

Мы рассмотрим поверхности с различными конфигурациями в пространстве с граничными условиями на величины h_0 и h_L .

Конфигурации путей Дика.

Возьмем L четным и $h_0 = h_L = 0$. Здесь

$$C_L = \frac{L!}{(L/2)!(L/2 + 1)!} \quad (2.2)$$

конфигураций данного типа. Пример такой конфигурации с $L = 16$ показан на рисунке 2.

Характеризуя поверхность, полезно определить некоторые величины. *Точка контакта* в узле j где $h_j = 0$. *Кластер*- область заключенная между двумя точками касания. *Размер* левого кластера j , если $j \neq 0$ наименьший номер для которого $h_j = 0$.

Полезно представлять данную модель как ромбики осаждающиеся на *основании* определяемом путем Дика $h_i = \frac{1 - (-1)^i}{2}$ ($i = 0, 1, \dots, L$). В этой картинке можно видеть капельки жидкости осаждающиеся на основании.

Конфигурация одноступенчатого пути Дика.

Возьмем L нечетным, $h_0 = 1$ и $h_L = 0$. Здесь C_{L+1} таких конфигураций. Например для $L = 15$ смотрите рис. 1.

Динамику модели RPM удобно описывать в терминах ромбиков которые падают на поверхности, которые являются путями Дика. Эволюция системы задается следующими правилами. С вероятностью $P_i = 1/(L - 1)$ ромбик падает на узел i , $i = 1, \dots, L - 1$. В зависимости от величины наклона $s_i = (h_{i+1} - h_{i-1})/2$ узла i , могут происходить следующие процессы:

i) $s_i = 0$ and $h_i > h_{i-1}$.

Ромбик попадает в локальный максимум и отражается.

ii) $s_i = 0$ and $h_i < h_{i-1}$.

Ромбик попадает в локальный минимум и поглощается ($h_i \mapsto h_i + 2$).

iii) $s_i = 1$.

Ромбик отражается после запуска десорбции слоя ромбиков от сегмента ($h_j > h_i = h_{i+b}$, $j = i + 1, \dots, i + b - 1$), *то есть* $h_j \mapsto h_j - 2$ для $j = i + 1, \dots, i + b - 1$. Этот слой содержит $b - 1$ ромбиков. Пример на рис. 3.

iv) $s_i = -1$.

Ромбик отражается после запуска десорбции слоя ромбиков принадлежащих сегменту ($h_j > h_i = h_{i-b}$, $j = i - b + 1, \dots, i - 1$), *то есть* $h_j \mapsto h_j - 2$ для $j = i - b + 1, \dots, i - 1$.

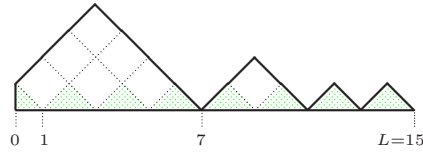


Рисунок 1: Конфигурация поверхности одноступенчатого пути Дика с четырьмя контактными точками и двумя кластерами для решетки размера $L = 15$. Размер левого кластера равен 7

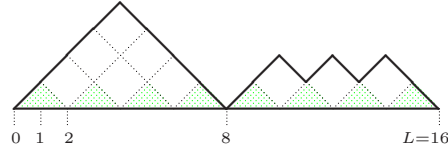


Рисунок 2: Конфигурация поверхности пути Дика с тремя контактными точками и двумя кластерами для решетки размера $L = 16$. Размер левого кластера равен 8.

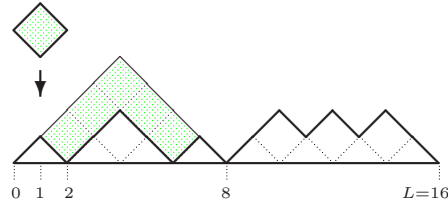


Рисунок 3: Событие десорбции. Упавший ромбик в первый узел создает обвал 5 ромбиков, которые закрашены. Все закрашенные ромбики уходят с поверхности при десорбции.

Модель RPM является частным примером Марковского процесса, эволюция которого задается следующим кинетическим уравнением:

$$\frac{d}{dt}P_{\alpha}(t) = - \sum_{\beta} H_{\alpha,\beta} P_{\beta}(t), \quad (2.3)$$

где индекс α нумерует состояния системы; $P_{\alpha}(t)$ - вероятность нахождения системы в состоянии α в момент времени t ; H - $n \times n$ матрица интенсивности, такая что коэффициенты $H_{\alpha,\beta}$ неположительны при $\alpha \neq \beta$ и $\sum_{\alpha} H_{\alpha,\beta} = 0$. $-H_{\alpha,\beta}$ вероятность перехода $|\beta\rangle \rightarrow |\alpha\rangle$. Основное состояние-собственный вектор системы $|0\rangle$, $H|0\rangle = 0$, дает вероятности в стационарном состоянии :

$$|0\rangle = \sum_{\alpha} P_{\alpha} |\alpha\rangle, \quad P_{\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{\alpha}(t). \quad (2.4)$$

Нормировочный множитель для ненормированных вероятностей P_{α} есть $\langle 0|0\rangle$ где

$$\langle 0| = \sum_{\alpha} \langle \alpha|, \quad \langle 0|H = 0. \quad (2.5)$$

Так как H - матрица интенсивности ,она имеет вещественные положительные, либо пары взаимно сопряженных собственных значений. Нулевые собственные значения- невырождены.

Стандартным источником матриц интенсивности для Марковского процесса является следующая алгебраическая конструкция. Рассмотрим конечную полугруппу G , порожденную набором генераторов: $g_i (i = 1, \dots, p)$. Естественным базисом в ее регулярном представлении является набор всевозможных мономов g_i . Как нетрудно убедиться, матрица оператора H :

$$H = \sum_{i=1}^p a_i(1 - g_i) \tag{2.6}$$

(a_i -неотрицательные действительные числа) в этом базисе является матрицей интенсивности.

Матрицу интенсивности, отвечающую процессу RPM, можно воспроизвести с использованием алгебры Темперли-Либа \mathcal{T}_L задаваемой генераторами $e_i, i = 1, \dots, L - 1$, и соотношениями на них

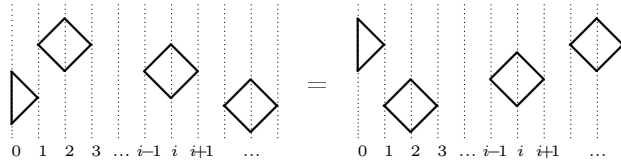
$$e_i^2 = \tau e_i, \quad e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i, \quad e_i e_j = e_j e_i \text{ если } |i - j| > 1. \tag{2.7}$$

Здесь τ - параметр алгебры, который необходимо положить равным единице: $\tau = 1$, для того чтобы e_i образовывали полугруппу.

Представим генераторы e_i как ромбики :

$$e_i = \begin{array}{c} \vdots \\ \diamond \\ \vdots \\ i \end{array} \tag{2.8}$$

Ромбики расположены на вертикальных линиях и они могут свободно двигаться вдоль этих линий пока не встретят другой ромбик:



Умножение в алгебре соответствует одновременному расположению нескольких ромбиков на одной и той же картинке и порядок произведения соответствует движению вниз ромбиков. Таким образом, картинка выше соответствует коммутационным соотношениям в (2.7). Оставшиеся соотношения в (2.7)и эквивалентны следующим картинкам

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \diamond \\ \vdots \\ i-1 \quad i \quad i+1 \dots \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ \diamond \\ \vdots \\ i-1 \quad i \quad i+1 \dots \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ \diamond \\ \vdots \\ i-1 \quad i \quad i+1 \dots \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ \diamond \\ \vdots \\ i-1 \quad i \quad i+1 \dots \end{array}, \tag{2.9}$$

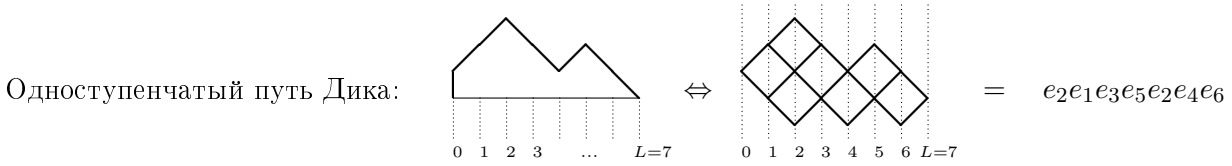
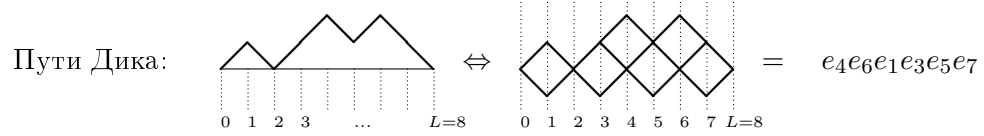
Сейчас мы рассмотрим проекторы в \mathcal{T}_L :

$$\begin{array}{l} \mathcal{T}_L, \quad L \text{ четный:} \\ \mathcal{T}_L, \quad L \text{ нечетный:} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \diamond \quad \diamond \\ \vdots \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots \quad L-1 \quad L \end{array} = e_1 e_3 \dots e_{L-1}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \diamond \quad \diamond \\ \vdots \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots \quad L-1 \quad L \end{array} = e_2 e_4 \dots e_{L-1}$$

Мы умножаем проекторы на все элементы алгебры слева (что соответствует падающим вниз ромбикам)и генерируем таким образом левые идеалы (лево-инвариантные подпространства алгебры). Размерности полученных идеалов: C_L для TL- алгебры L - четное, C_{L+1} для TL-алгебры L - нечетное. Эти размерности совпадают с числом путей Дика , одноступенчатых путей Дика. Теперь довольно просто увидеть соответствие между путями и картинками в терминах идеалов.

Это проиллюстрировано ниже.



Очевидно что проекторы соответствуют основаниям. Матрица интенсивности описывающая обычную однородную модель RPM задается выражением

$$H_L = \sum_{i=1}^{L-1} (1 - e_i) \quad (2.10)$$

Мы рассматриваем модель с неоднородной на границе матрицей интенсивности

$$H_L^{(a)} = a(1 - e_1) + \sum_{i=2}^{L-1} (1 - e_i), \quad (2.11)$$

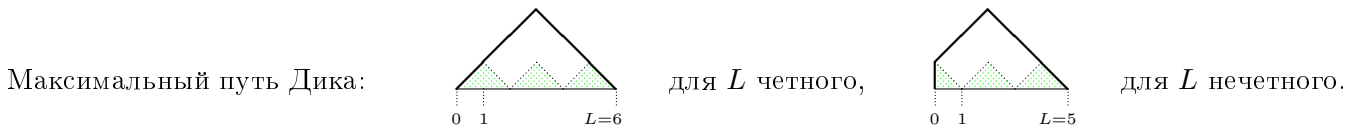
где a параметр, отвечающий за более активное (пассивное) падение первого ромбика.

Заметим что умножение идеалов с генераторами e_i на картинках в соответствии с правилами (2.9) совпадают с элементарными процессами (поглощение, десорбция) в RPM модели.

Основное состояние описываемое этими матрицами интенсивности обладает замечательными комбинаторными свойствами. Новые комбинаторные аспекты основного состояния данной модели будут рассмотрены ниже.

3. ЧАСТИЧНЫЕ СУММЫ.

Стационарное состояние в модели RPM для системы размера L описывается нулевым собственным вектором $|0\rangle_L$ оператора H_L (2.11). Это линейная комбинация путей Дика определяемая с точностью до постоянного множителя. Удобная нормировка для $|0\rangle_L$ - положить коэффициент максимального пути Дика (нижняя картинка) равным 1.



Это самый маленький коэффициент в векторе $|0\rangle_L$ и соответствующее состояние наименее вероятно в стационарном режиме. С таким выбором все веса различных путей Дика в основном состоянии будут полиномами по параметру неоднородности a с целочисленными коэффициентами.

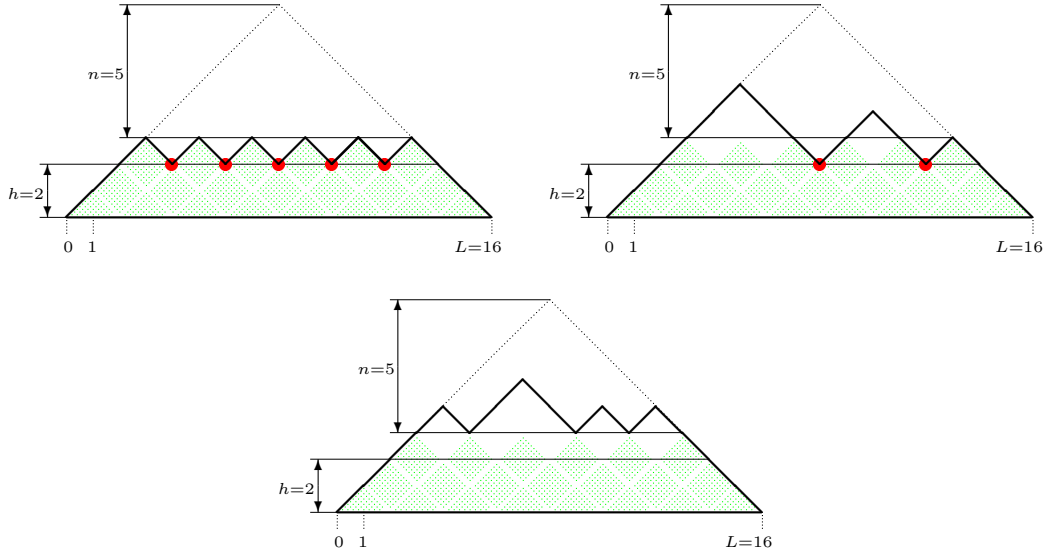


Рисунок 4 : Пример путей Дика размера $L = 16$ удовлетворяющих условиям $h = 2$ ($\Leftrightarrow n = 5$). Число m - количество точек касания на высоте $h = 2$ (красные точки на картинке) равны соответственно 5, 2 и 0.

Рассмотрим путь Дика размера L . Возьмем h число из ряда

$$0, 1, \dots, \lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor,$$

такое что путь Дика не имеет локальных минимумов ниже высоты h . (См. рис.4). Пусть m ($m \geq 0$) - количество точек касания на высоте h для данного пути. Мы рассматриваем все конфигурации которые имеют фиксированное число m точек касания на высоте h .

Определение. Сумму всех коэффициентов в $|0\rangle_L$ в конфигурации c

$$n = \lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor - h, \quad n = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor, \quad \text{и} \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

назовем $P(L, n, m)$.

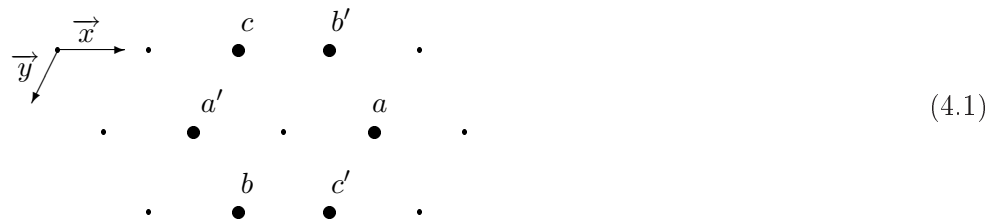
Пусть $\sum_{m=0}^n P(L, n, m) = S(L, n)$, частичные суммы- которые есть просто суммы всех коэффициентов в $|0\rangle_L$ соответствующих конфигураций с локальными минимумами на высоте больше или равной $h = (\lfloor (L-1)/2 \rfloor - n)$. Кроме того $S(L, \lfloor (L-1)/2 \rfloor)$ совпадает с нормировочным множителем (сумма всех весов) $|0\rangle_L$:

$${}_L\langle 0|0\rangle_L = S(L) = S(L, \lfloor (L-1)/2 \rfloor). \quad (3.2)$$

Суммы $S(L, k)$ и $P(L, n, m)$ удовлетворяют соотношению шестиугольника и расщепленному уравнению шестиугольника Паскаля, которые рассмотрены в следующей части.

4. СООТНОШЕНИЕ ШЕСТИУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ.

Давайте разместим числа (полиномы) в вершинах тригональной решетки таким образом что в вершинах каждого элементарного шестиугольника как показано ниже,



удовлетворялось соотношение

$$c' c = a' a + b' b. \quad (4.2)$$

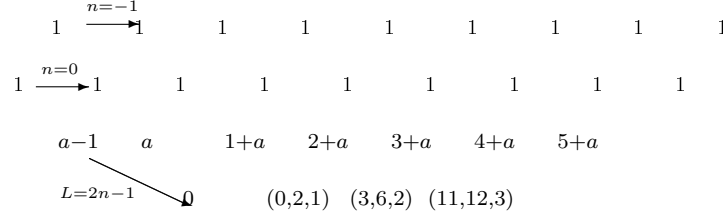
Введем координаты $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ на решетке (см. рис. выше) и запишем $S(L, n)$ в вершине $(L\vec{x} + n\vec{y})$ теперь запишем соотношение (4.2) в виде

$$S(L+1, n+1)S(L-1, n-1) = S(L-1, n)S(L+1, n) + S(L, n-1)S(L, n+1). \quad (4.3)$$

Это частная двумерная редукция трехмерного дискретного уравнения Хироты [10]. Все частичные суммы восстанавливаются из этого соотношения и начальных условий:

$$S^{(a)}(L, -1) = 1, \quad S^{(a)}(1, 1) = a - 1, \quad S^{(a)}(2n - 1, n) = 0 \quad \forall n > 1. \quad (4.4)$$

Это можно увидеть на картинке $((x, y, z) = x + ya + za^2)$:



Теперь введем вертикальное направление \vec{z} на картинке (4.1) и разместим числа (полиномы) $P(L, n, m)$ в соответствующих вершинах. $(L\vec{x} + n\vec{y} + m\vec{z}) - 3d$ решетка (см. рис. 5).

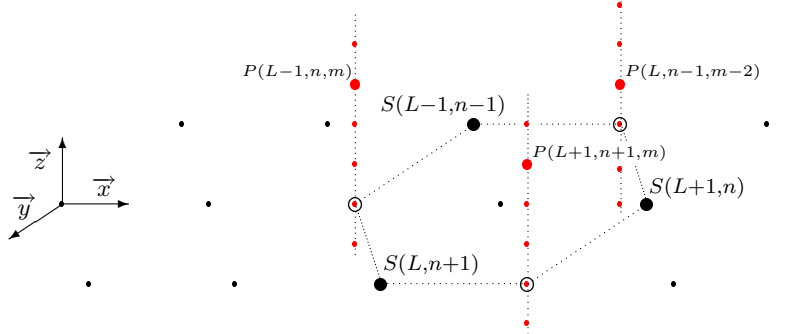


Рисунок 5: Расщепленное уравнение шестиугольника: полиномы $S(L+1, n+1)$, $S(L-1, n)$ и $S(L, n-1)$ расщепляются, соответственно, в пары $P(L+1, n+1, m)$, $P(L-1, n, m)$ и $P(L, n-1, m)$, $m = 0, 1, \dots$

Мы налагаем следующие соотношения на $P(L, n, m)$:

$$\sum_{m=0}^n P(L, n, m) = S(L, n), \quad (4.5)$$

$$P(L, n, -k) = P(L, n, n+k) = 0 \quad \forall k > 0, n \geq 0, \quad (4.6)$$

и уравнение

$$\begin{aligned} P(L+1, n+1, m)S(L-1, n-1) \\ = P(L-1, n, m)S(L+1, n) + P(L, n-1, m-2)S(L, n+1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Суммируя соотношение по m (4.7) получаем соотношение шестиугольника (4.3).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ В МОДЕЛИ С $H_L^{(a)} = a(1 - e_1) + \sum_{i=2}^{L-1} (1 - e_i)$

В модели с гамильтонианом $H_L^{(a)} = a(1 - e_1) + \sum_{i=2}^{L-1} (1 - e_i)$, что соответствует более активному (пассивному) падению ромбика на первый узел решетки. То есть все ромбики за исключением первого падают с (ненормированной) вероятностью 1, а первый падает с вероятностью a . Получив волновые функции основного состояния системы для размеров системы с $L = 4 - 10$, компоненты которой являются целочисленными полиномами по a , при нормировке когда вероятность обнаружить систему в состоянии максимального пути Дика равна 1 (смотрите приложение). Вычислив

затем частичные суммы $S(L, k)$ и $P(L, k, n)$ (которые тоже очевидно являются целочисленными полиномами) убеждаемся что они удовлетворяют соотношениям (расщепленного) шестиугольника. Эти полиномы написаны в работе [2] и вычислены рекуррентно из соотношения шестиугольника. Далее опытным путем были получены следующие утверждения, которые позволяют вычислять суммы $S(L, k)$ и $P(L, k, n)$ для любых размеров системы L , высот k и количества точек касания n .

Утверждение 1. Для системы с размером L и высотой k частичные суммы $S(L, k)$ равны

$$S(L, k) = \det_{1 \leq i, j \leq k} \left[\sum_{t=0}^{[(2j-i-3)/2]} (-1)^t \binom{L+i+j-2k-4-t}{2j-i-3-2t} a(a-1) + \binom{L+i+j-2k-2}{2j-i-1} a + \binom{L+i+j-2k-2}{2j-i} \right]. \quad (5.1)$$

Сейчас мы докажем Утверждение о том, что детерминантная формула удовлетворяет уравнению шестиугольника. Пусть

$$S(L, k) = \det_{1 \leq i, j \leq k} T_{ij}, \quad (5.2)$$

где

$$T_{ij}(L, k) = \sum_{t=0}^{[(2j-i-3)/2]} (-1)^t \binom{L+i+j-2k-4-t}{2j-i-3-2t} a(a-1) + \binom{L+i+j-2k-2}{2j-i-1} a + \binom{L+i+j-2k-2}{2j-i}. \quad (5.3)$$

Вообще суммирование по t ограничивается условиями $\binom{n}{r} = 0 \quad \forall r < 0$ и $\forall r > n$. Мы начнем с вывода еще одной формулы для $S(L, k)$.

Лемма 1.

$$S(L, k) = \det_{1 \leq i, j \leq k+1} U_{ij}, \quad (5.4)$$

где

$$U_{i,1}(L, k) = (-1)^{i-1}, \quad (5.5)$$

$$U_{i,j}(L, k) = \sum_{t=0}^{[(2j-i-5)/2]} (-1)^t \binom{L+i+j-2k-6-t}{2j-i-5-2t} a(a-1) + \binom{L+i+j-2k-4}{2j-i-3} a + \binom{L+i+j-2k-4}{2j-i-2}. \quad (5.6)$$

Доказательство 1. Для того, чтобы убедиться в равенстве $\det U = \det T$ мы сделаем линейные преобразования матрицы U , не влияющие на детерминант. Вначале мы сложим i -тую строку с $(i-1)$ -ой с целью получить нули в первом столбце, за исключением первого элемента $U_{1,1} = 1$. Затем к j -тому столбцу прибавляется сумма столбцов $\sum_{t=0}^{j-2} (-1)^t (j-t)$

Далее у нас будут возникать суммы вида:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{j-2} (-1)^t \left(\binom{L+i+j-2k-4-t}{2j-i-3-2t} + \binom{L+i+j-2k-5-t}{2j-i-2-2t} \right) &= \\ &= \binom{L+i+j-2k-4}{2j-i-2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

где мы использовали правило Паскаля $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$. После разложения по первому столбцу из вышесказанного следует очевидное равенство $\det U = \det T$.

Заметим, что частичные суммы $P(L, k, n)$ равны

$$P(L, k, n-1) = M_{n1}, \quad (5.8)$$

где M_{n1} - минор элемента матрицы U в первом столбце, n -ой строчки.

Доказываемая нами формула следует из частного случая соотношения Плюккера для детерминантов. Рассмотрим пару $n \times n$ матриц $A_{\ell m}$ и $B_{\ell m}$. Пусть A_{ℓ} - ℓ -th строка матрицы A и введем следующую запись:

$$\det A = |A|, \quad A = [A_1, \dots, A_n],$$

В этих обозначениях соотношение Плюккера запишется следующим образом

$$|A||B| = \sum_{j=1}^n |A_1, \dots, A_{n-1}, B_j| \times |B_1, \dots, B_{j-1}, A_n, B_{j+1}, \dots, B_n|, \quad (5.9)$$

где сумма берется по всем перестановкам последней строки матрицы A со всеми строками матрицы B .

Сейчас мы возьмем $n = k + 1$ и подставим вместо матриц A и B следующие матрицы:

$$A(L, k) = U(L, k) = [U_1, \dots, U_{k+1}], \quad (5.10)$$

$$B(L, k) = [\delta_1, U_2, \dots, U_k, \delta_{k+1}], \quad (5.11)$$

где $\delta_{\ell m}$ - символ Кронекера. Заметим что $U_{\ell+2, m+1}(L, k) = U_{\ell m}(L-1, k-2)$ (тоже для T).

Согласно Лемме 1 $|A| = S(L, k)$. Вычисляя детерминант матрицы B мы разлагаем по верхней и нижней строке, в полученной $(k-1) \times (k-1)$ матрице первый столбец тоже δ -типа.

Таким образом получаем

$$|B| = S(L-2, k-2).$$

Сейчас мы рассмотрим правую сторону соотношения Плюккера. Здесь перестановки только с первой и последней строчками матрицы B дают неисчезающий вклад. Перестановка последней строки в A и первой строки в B дает следующие результаты:

$$|U_1, \dots, U_k, \delta_1| = (-1)^k S(L-1, k),$$

$$|U_{k+1}, U_2, \dots, U_k, \delta_{k+1}| = (-1)^k S(L-1, k-2),$$

где в первом равенстве раскладываем по последней строке; во втором, вначале раскладываем по последней строке, затем по второму столбцу (δ -типа) и переставляем строки соответствующим образом.

Перестановка последней строки в A и последней в B дает такие вклады:

$$|U_1, \dots, U_k, \delta_{k+1}| = S(L-2, k-1).$$

$$|\delta_1, U_2, \dots, U_{k+1}| = S(L, k-1).$$



В первом равенстве раскладываем по последней строке; во втором по первой строке и второму столбцу.

Таким образом соотношение Плюккера для матриц A и B воспроизводит уравнение шестиугольника Паскаля для частичных сумм.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь написаны стационарные волновые функции и частичные суммы для решеток размером $L = 4 - 10$ для гамильтониана $H_L^{(a)} = a(1 - e_1) + \sum_{i=2}^{L-1} (1 - e_i)$.






6.1. $L = 4$.

α	ψ_α
	$1 + a$
	1

$$S(4, 0) = 1$$

$$S(4, 1) = 2 + a$$

6.2. $L = 5$.

α	ψ_α
	$a(a + 2)$
	a
	$a(a + 2)$
	$2 + a$
	1

$$S(5, 0) = 1$$

$$S(5, 1) = 3 + a$$

$$S(5, 2) = 3 + 6a + 2a^2$$

$$P(5, 0, 0) = 1$$

$$P(5, 1, 0) = 1$$


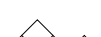

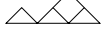

$$P(5, 1, 1) = 2 + a$$

$$P(5, 2, 0) = 3 + a$$

$$P(5, 2, 1) = 3a + a^2$$

$$P(5, 2, 2) = 2a + a^2$$

6.3. $L = 6$.

α	ψ_α
	$3 + 6a + 2a^2$
	$3 + 2a$
	$1 + 3a + a^2$
	$3 + a$
	1

$$S(6, 0) = 1$$

$$S(6, 1) = 4 + a$$

$$S(6, 2) = 11 + 12a + 3a^2$$

$$P(6, 0, 0) = 1$$

$$P(6, 1, 0) = 1$$

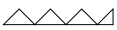











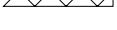
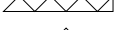
$$P(6, 1, 1) = 3 + a$$

$$P(6, 2, 0) = 4 + a$$

$$P(6, 2, 1) = 4 + 5a + a^2$$

$$P(6, 2, 2) = 3 + 6a + 2a^2$$

6.4. $L = 7$.

α	ψ_α
	$a(11 + 12a + 3a^2)$
	$a(7 + 3a)$
	$a(3 + 4a + a^2)$
	$a(11 + 12a + 3a^2)$
	$a(4 + a)$
	a
	$3a(2 + a)$
	$a(11 + 12a + 3a^2)$
	$a(2 + a)^2$
	$11 + 12a + 3a^2$
	$5 + 3a$
	$5 + 4a + a^2$
	$4 + a$
	1

$$S(7, 0) = 1$$

$$S(7, 1) = 5 + a$$

$$S(7, 2) = 26 + 20a + 4a^2$$

$$S(7, 3) = 26 + 78a + 55a^2 + 11a^3$$

$$P(7, 0, 0) = 1$$

$$P(7, 1, 0) = 1$$

$$P(7, 1, 1) = 4 + a$$

$$P(7, 2, 0) = 5 + a$$

$$P(7, 2, 1) = 10 + 7a + a^2$$

$$P(7, 2, 2) = 11 + 12a + 3a^2$$




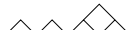










$$P(7, 3, 0) = 26 + 20a + 4a^2$$

$$P(7, 3, 1) = 26a + 20a^2 + 4a^3$$

$$P(7, 3, 2) = 21a + 19a^2 + 4a^3$$

$$P(7, 3, 3) = 11a + 12a^2 + 3a^3$$

6.5. $L = 8$.

α	ψ_α
	$26 + 78a + 55a^2 + 11a^3$
	$26 + 38a + 11a^2$
	$8 + 33a + 25a^2$
	$5(2 + 7a + 5a^2 + a^3)$
	$26 + 25a + a^2$
	$9 + 5a$
	$9 + 16a + 5a^2$
	$5 + 27a + 20a^2 + 4a^3$
	$1 + 7a + 5a^2 + a^3$
	$26 + 20a + 4a^2$
	$10 + 4a$
	$8 + 5a + a^2$
	$5 + a$
	1

$$S(8, 0) = 1$$

$$S(8, 1) = 6 + a$$

$$S(8, 2) = 50 + 30a + 5a^2$$

$$S(8, 3) = 170 + 294a + 156a^2 + 26a^3$$

$$P(8, 0, 0) = 1$$

$$P(8, 1, 0) = 1$$

$$P(8, 1, 1) = 5 + a$$

$$P(8, 2, 0) = 6 + a$$

$$P(8, 2, 1) = 18 + 9a + a^2$$

$$P(8, 2, 2) = 26 + 20a + 4a^2$$

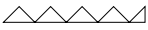
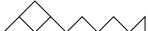





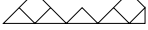
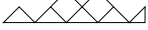
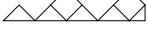




$$P(8, 3, 0) = 50 + 30a + a^2$$









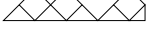
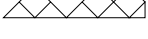


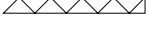
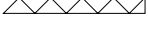
$$P(8, 3, 1) = 50 + 80a + 35a^2 + 5a^3$$




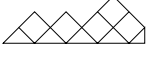





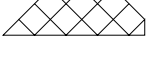




$$P(8, 3, 2) = 44 + 106a + 61a^2 + 10a^3$$

$$P(8, 3, 3) = 26 + 78a + 55a^2 + 11a^3$$

6.6. $L = 9$.






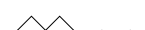








α	ψ_α
	$2a(85 + 147a + 78a^2 + 13a^3)$
	$2a(60 + 57a + 13a^2)$
	$a(51 + 107a + 60a^2 + 10a^3)$
	$2a(1 + a)(5 + 2a)^2$
	$2a(85 + 147a + 78a^2 + 13a^3)$
	$5a(17 + 12a^2 + 2a^2)$
	$2a(17 + 17a + 4a^2)$
	$a(114 + 113a + 26a^2)$
	$a(23 + 54a + 30a^2 + 5a^3)$
	$a(47 + 96a + 54a^2 + 9a^3)$
	$2a(85 + 147a + 78a^2 + 13a^3)$
	$2a(12 + 5a)$
	$a(4 + 11a + 6a^2 + a^3)$
	$3a(20 + 34a + 18a^2 + 3a^3)$


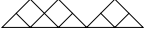



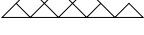


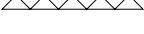
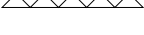
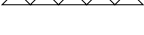
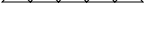


α	ψ_α
	$5a(10 + 6a + a^2)$
	$a(71 + 54a + 9a^2)$
	$a(95 + 104a + 26a^2)$
	$2a(85 + 147a + 78a^2 + 13a^3)$
	$a(16 + 5a)$
	$a(12 + 6a + a^2)$
	$a(6 + a)$
	a
	$a(19 + 9a)$
	$a(31 + 35a + 9a^2)$
	$a(57 + 93a + 48a^2 + 8a^3)$
	$a(69 + 114a + 60a^2 + 10a^3)$
	$a(40 + 59a + 30a^2 + 5a^3)$
	$a(9 + 12a + 6a^2 + a^3)$



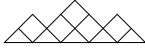
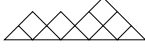


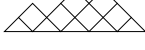


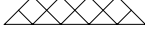

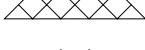

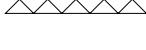
α	ψ_α
	$2(85 + 147a + 78a^2 + 13a^3)$
	$75 + 95a + 26a^2$
	$71 + 101a + 48a^2 + 8a^3$
	$5(15 + 23a + 12a^2 + 2a^3)$
	$8(7 + 6a + a^2)$
	$30 + 36a + 10a^2$
	$56 + 64a + 30a^2 + 5a^3$
	$14 + 8a$
	$14 + 13a + 6a^2 + a^3$
	$5(10 + 6a + a^2)$
	$14 + 5a$
	$14 + 6a + a^2$
	$6 + a$
	1

$$\begin{aligned}
S(9, 0) &= 1 \\
S(9, 1) &= 7 + a \\
S(9, 2) &= 85 + 42a + 6a^2 \\
S(9, 3) &= 646 + 816a + 350a^2 + 50a^3 \\
S(9, 4) &= 17(38 + 152a + 167a^2 + 70a^3 + 10a^4) \\
P(9, 0, 0) &= 1 \\
P(9, 1, 0) &= 1 \\
P(9, 1, 1) &= 6 + a \\
P(9, 2, 0) &= 7 + a \\
P(9, 2, 1) &= 28 + 11a + a^2 \\
P(9, 2, 2) &= 5(10 + 6a + a^2) \\
P(9, 3, 0) &= 85 + 42a + 6a^2 \\
P(9, 3, 1) &= 170 + 169a + 54a^2 + 6a^3 \\
P(9, 3, 2) &= 221 + 311a + 134a^2 + 18a^3 \\
P(9, 3, 3) &= 2(85 + 147a + 78a^2 + 13a^3) \\
P(9, 4, 0) &= 646 + 816a + 350a^2 + 50a^3 \\
P(9, 4, 1) &= 2a(323 + 408a + 174a^2 + 25a^3) \\
P(9, 4, 2) &= a(561 + 774a + 344a^2 + 50a^3) \\
P(9, 4, 3) &= a(391 + 605a + 290a^2 + 44a^3) \\
P(9, 4, 4) &= 2a(85 + 147a + 78a^2 + 13a^3)
\end{aligned}$$

6.6.1. $L = 10$.

α	ψ_α
	$17(38 + 152a + 167a^2 + 70a^3 + 10a^4)$
	$646 + 1494a + 925a^2 + 170a^3$
	$196 + 1010a + 1215a^2 + 525a^3 + 75a^4$
	$228 + 1045a + 1180a^2 + 497a^3 + 71a^4$
	$5(52 + 225a + 250a^2 + 105a^3 + 15a^4)$
	$646 + 1100a + 525a^2 + 75a^3$
	$206 + 553a + 369a^2 + 71a^3$
	$253 + 641a + 406a^2 + 75a^3$
	$112 + 757a + 917a^2 + 392a^3 + 56a^4$
	$76 + 399a + 484a^2 + 210a^3 + 30a^4$
	$155 + 814a + 929a^2 + 392a^3 + 56a^4$
	$5(45 + 56a + 15a^2)$
	$22 + 194a + 233a^2 + 98a^3 + 14a^4$
	$34 + 202a + 232a^2 + 98a^3 + 14a^4$

α	ψ_α
	$646 + 901a + 392a^2 + 56a^3$
	$5(45 + 85a + 42a^2 + 6a^3)$
	$134 + 414a + 286a^2 + 56a^3$
	$85 + 688a + 822a^2 + 350a^3 + 50a^4$
	$253 + 251a + 56a^2$
	$206 + 247a + 98a^2 + 14a^3$
	$2(67 + 49a + 7a^2)$
	$14(2 + a)$
	$15(5 + 7a + 2a^2)$
	$14(2 + 7a + 5a^2 + a^3)$
	$19 + 200a + 234a^2 + 98a^3 + 14a^4$
	$7(3 + 28a + 33a^2 + 14a^3 + 2a^4)$
	$7 + 90a + 101a^2 + 42a^3 + 6a^4$
	$1 + 16a + 17a^2 + 7a^3 + a^4$

α	ψ_α
	$646 + 816a + 350a^2 + 50a^4$
	$260 + 229a + 50a^2$
	$228 + 248a + 98a^2 + 14a^3$
	$7(28 + 33a + 14a^2 + 2a^3)$
	$155 + 98a + 14a^2$
	$76 + 64a + 14a^2$
	$112 + 107a + 42a^2 + 6a^3$
	$34 + 14a$
	$22 + 18a + 7a^2 + a^3$
	$85 + 42a + 6a^2$
	$21 + 6a$
	$19 + 7a + a^2$
	$7 + a$
	1

$$\begin{aligned}
S(10, 0) &= 1 \\
S(10, 1) &= 8 + a \\
S(10, 2) &= 7(19 + 8a + a^2) \\
S(10, 3) &= 1862 + 1881a + 680a^2 + 85a^3 \\
S(10, 4) &= 19(391 + 938a + 780a^2 + 272a^3 + 34a^4) \\
P(10, 0, 0) &= 1 \\
P(10, 1, 0) &= 1 \\
P(10, 1, 1) &= 7 + a \\
P(10, 2, 0) &= 8 + a \\
P(10, 2, 1) &= 40 + 13a + a^2 \\
P(10, 2, 2) &= 85 + 42a + 6a^2 \\
P(10, 3, 0) &= 7(19 + 8a + a^2) \\
P(10, 3, 1) &= 7(57 + 43a + 11a^2 + a^3) \\
P(10, 3, 2) &= 684 + 708a + 246a^2 + 28a^3 \\
P(10, 3, 3) &= 646 + 816a + 350a^2 + 50a^3 \\
P(10, 4, 0) &= 1862 + 1881a + 680a^2 + 85a^3 \\
P(10, 4, 1) &= 1862 + 3743a + 2561a^2 + 765a^3 + 85a^4 \\
P(10, 4, 2) &= 1729 + 4940a + 4170a^2 + 1411a^3 + 170a^4 \\
P(10, 4, 3) &= 1330 + 4674a + 4570a^2 + 1717a^3 + 221a^4 \\
P(10, 4, 4) &= 17(38 + 152a + 167a^2 + 70a^3 + 10a^4)
\end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] A.V. Razumov and Yu.G. Stroganov, ‘*Spin chains and combinatorics*’, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 3185-3190 [arXiv:math.CO/0012141](#).
- [2] P. Pyatov, ‘*Raise and Peel Models of fluctuating interfaces and combinatorics of Pascal’s hexagon*’. J. Stat. Mech. (2004) P09003 [arXiv:math-ph/0406025](#).
- [3] P. Pyatov, Francisco.C. Alcaraz and V. Rittenberg ‘*Density profiles in the raise and peel model with and without a wall. Physics and combinatorics*’. [arXiv:cond-mat.stat-mech/0709.4575v1](#) .
- [4] P. Pyatov, J. de Gier ‘*Factorised solutions of Temperley-Lieb qKZ equations on a segment*’. [arXiv:math-ph/0710.5362v1](#) .
- [5] P. Pyatov, J. de Gier, Paul Zinn-Justin ‘*Punctured plane partitions and the q-deformed Knizhnik–Zamolodchikov and Hirota equations*’. [arXiv:math.CO/0712.3584v2](#) .
- [6] J. de Gier, A. Nichols, P. Pyatov and V. Rittenberg, ‘*Magic in the spectra of the XXZ quantum chain with boundaries at $\Delta = 0$ and $\Delta = -1/2$* ’, Nucl. Phys. **B729** (2005) 387-418 [arXiv:hep-th/0505062](#).
- [7] B. Nienhuis, P. Pearce, J. de Gier and V. Rittenberg, ‘*Stochastic processes and conformal invariance*’, Phys. Rev. **E67** (2003) 016101-016104 [arXiv:cond-mat/0205467](#).
- [8] B. Nienhuis, P. Pearce, J. de Gier and V. Rittenberg, ‘*The raise and peel model of a fluctuating interface*’, J. Stat. Mech. **114** (2004) 1-35 [arXiv:cond-mat/0301430](#).
- [9] Francisco.C. Alcaraz and V. Rittenberg ‘*Different facets of the raise and peel model*’, Nucl. Phys. **B729**(2004) P07009 [arXiv:cond-mat/0703725](#).
- [10] Zabrodin A. ‘*A survey of Hirota’s difference equations*’, TMΦ т. 113 (1997) 1347–1392 [arXiv:solv-int/9704001](#).