Московский ордена Трудового Красного Знамени
физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра физики взаимодействия частиц высоких энергий
Объедененный институт ядерных исследований
Учебно-научный центр

Парфенов А.В.

Динамика релятивистской струны и нетривиальные законы сохранения

Бакалаврская работа

Научный руководитель
д.ф.-м.н. ИСАЕВ А.П.

Дубна Июнь 2014

0 Введение

Хорошо известна проблема квантования релятивистских струн, которые эволюционируют в пространстве-времени некритической размерности (для бозонной струны $D = 26$, для фермионной или суперструны $D = 10$). А.М. Поляков [2] нашел решение этой проблемы, предложив рассматривать теорию струны, взаимодействующей с двумерной гравитацией. В данной работе была изучена бозонная струна, взаимодействующая с двумерной гравитацией, на основе работ [1, 2, 3, 4] и найдено решение уравнений движения свободной замкнутой струны. Также была вычислена алгебра Вирасоро для двумерной гравитации. В такой теории получены решения задачи Коши для некоторых конкретных случаев, а именно для замкнутой эллиптической и открытой вращающейся струн в 3-мерном пространстве времени. Также в этой работе были рассмотрены нетривиальные нелокальные законы сохранения для бозонной струны [9] и явно вычислены и исследованы некоторые простейшие примеры таких законов сохранения.

1 Замкнутая бозонная струна с гравитацией

Гамильтоново действие бозонной струны в D измерениях имеет вид

$$S_{BS} = \int_0^T d\tau \int_0^{2\pi} ds \, [p^\mu \, \dot{x}_\mu - \frac{1}{4} \, l^+(s,\tau) \, (z^{+\mu} \, z^+_\mu) + \frac{1}{4} \, l^-(s,\tau) \, (z^{-\mu} \, z^-_\mu)] \, , \tag{1.1}$$

где вектор-функции $x_\mu(s,\tau)$ $(\mu = 0, 1, \ldots, D-1)$ задают положение струны, $p^\mu(s,\tau)$ – компоненты ее плотности импульса, 0 и T - начальное и конечное значения временного параметра τ, $l^\pm(s,\tau)$ – множители Лагранжа и

$$z^\pm_\mu(\tau,s) = p_\mu(\tau,s) \pm \partial_s \, x_\mu(\tau,s) = p_\mu(\tau,s) \pm x'_\mu(\tau,s) \, .$$

Рассмотрим обобщение струнной модели (1.1), которое описывается действием

$$S = S_{BS} + S^{gr} \, , \tag{1.2}$$

где действие S^{gr} двумерной гравитации имеет вид

$$S^{gr} = \int_0^T d\tau \int ds \sum_{\pm} \left\{ \dot{\Phi}_\pm \, P_\pm - l^\pm \, \left[\Phi'_\pm(s,\tau) \, P_\pm(s,\tau) \mp \frac{\kappa}{2} \, \left(\ln \Phi'_\pm(s,\tau) \right)'' \right] \right\} \, , \tag{1.3}$$

и κ — некоторый параметр. Заметим, что в теории двумерной гравитации [1] полагают

$$\kappa = (D-26)/(24\pi) \, .$$

Вариация действия (1.2) по переменным p_μ и x_μ дает уравнения движения

$$\begin{aligned} \partial_\tau x_\mu(s,\tau) &= \tfrac{1}{2}\Big(l^+(s,\tau) z^+(s,\tau) - l^-(s,\tau) z^-(s,\tau) \Big) \, , \\ \partial_\tau p_\mu(s,\tau) &= \tfrac{1}{2}\partial_s \Big(l^+(s,\tau) z^+(s,\tau) + l^-(s,\tau) z^-(s,\tau) \Big) \, . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Вариация действия (1.2) по переменным $P_\pm$ дает уравнения движения

$$\partial_\tau \Phi_+(s,\tau) = l^+(s,\tau) \partial_s \Phi_+(s,\tau) \, , \quad \partial_\tau \Phi_-(s,\tau) = l^-(s,\tau) \partial_s \Phi_-(s,\tau) \, . \tag{1.5}$$

Из первого уравнения в (1.4) мы получаем классическое решение для плотности импульса

$$p^{cl}_\mu = \frac{2}{\ell^+ - \ell^-}\dot{x}_\mu - \frac{\ell^+ + \ell^-}{\ell^+ - \ell^-}x'_\mu \, .$$

Сдвинем импульс на это классическое решение $p_\mu = p^{cl}_\mu + \tilde{p}_\mu$ и сделаем замену переменных $p_\mu \to \tilde{p}_\mu$ в действии (1.1). В результате получаем выражение для S_{BS} в виде действия Полякова [2] с космологическим членом

$$S_{BS} = \int d\tau\, ds\, \frac{(\ell^+ - \ell^-)}{4}\Big((p^{cl})^2 - (x')^2 - (\tilde{p})^2\Big) = \int d\tau\, ds\, \Big(\lambda\sqrt{g} + \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ab}\partial_a x_\mu \partial_b x^\mu\Big) \, , \tag{1.6}$$

где λ - космологическая постоянная и

$$\sqrt{g} = \lambda^{-1}\frac{(\ell^- - \ell^+)}{4}(\tilde{p})^2 \, , \quad \sqrt{g}g^{ab} = \frac{1}{\ell^+ - \ell^-}\begin{pmatrix} 2 & -(\ell^+ + \ell^-) \\ -(\ell^+ + \ell^-) & 2\ell^+\ell^- \end{pmatrix} \, . \tag{1.7}$$

Выражения (1.7) дают связь множителей лагранжа и флуктуации импульса $\tilde{p}$ с двумерной метрикой на мировой поверхности. Заметим, что автоматически мы имеем $\det(\sqrt{g}g^{ab}) = -1$.

Напишем уравнения движения, которые получаются вариацией действия (1.3) по переменным $\Phi_\pm$.

$$\begin{aligned} \delta S^{gr} = \textstyle\int_0^T d\tau \int ds \sum_\pm \Big\{P_\pm\, \delta\dot{\Phi}_\pm - l^\pm \Big[P_\pm(s,\tau)\, \delta\Phi'_\pm(s,\tau) \mp \frac{\kappa}{2} \Big(\frac{\delta\Phi'_\pm}{\Phi'_\pm}\Big)''\Big]\Big\} = \\ \textstyle\int_0^T d\tau \int ds \sum_\pm \Big\{-\dot{P}_\pm\, \delta\Phi_\pm + (l^\pm P_\pm)'\, \delta\Phi_\pm \pm \frac{\kappa}{2}\,(l^\pm)'' \Big(\frac{\delta\Phi'_\pm}{\Phi'_\pm}\Big)\Big\} = \\ \textstyle\int_0^T d\tau \int ds \sum_\pm \Big\{-\dot{P}_\pm + (l^\pm P_\pm)' \mp \frac{\kappa}{2} \Big(\frac{(l^\pm)''}{\Phi'_\pm}\Big)'\Big\}\, \delta\Phi_\pm \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\dot{P}_\pm = \Big\{l^\pm P_\pm \mp \tfrac{\kappa}{2}\tfrac{(l^\pm)''}{\Phi'_\pm}\Big\}' \, . \tag{1.9}$$

При вариации действия (1.3) по переменным $P_\pm$ получим следующие уравнения

$$\dot{\Phi}_\pm = l^\pm\, \Phi'_\pm \, . \tag{1.10}$$

Прямым вычислением можно проверить, что неоднородное дифференциальное уравнение (1.9) имеет частное решение $P_\pm = \pm\frac{\kappa}{2}\frac{1}{\Phi'_\pm}''$, где $\Phi_\pm$ удовлетворяет (1.10). Известно, что урвнения типа (1.9) решаются неоднозначно, а именно, если $P_\pm$ является решением (1.9), то его решением является и $P_\pm + L$, где L любое решение однородного уравнения $\dot{L} = (l^\pm L)'$. В частности мы можем положить $L = b_0(s,\tau)\,\Phi'_\pm$ (здесь $b_0(s,\tau)$ - произвольное поле, удовлетворяющее уравнению $\dot{b_0} = l^\pm b'_0$, например, некоторая функция $b_0(\Phi_\pm)$ или константа) и записать решение (1.9) в более общем виде

$$P_\pm = \pm\tfrac{\kappa}{2}\Big(\tfrac{1}{\Phi'_\pm}\Big)'' + b_0\,\Phi'_\pm = \mp\tfrac{\kappa}{2}\Big(\tfrac{\Phi'''_\pm}{(\Phi'_\pm)^2} - 2\tfrac{(\Phi''_\pm)^2}{(\Phi'_\pm)^3}\Big) + b_0\,\Phi'_\pm \, . \tag{1.11}$$

Подставим теперь это решение в действие (1.3), а также выразим множители Лагранжа $l^\pm$ в терминах полей $\Phi_\pm$ с помощью (1.10). В результате зависимость от b_0

исчезает и мы получаем лагранжево действие для двумерной конформной гравитации

$$S^{gr} = \int_0^T d\tau \int ds \sum_{\pm} \left\{ \left[b_0\, \dot{\Phi}_{\pm}\, \Phi'_{\pm} \mp \tfrac{\kappa}{2} \left(\tfrac{\Phi'''_{\pm}}{\Phi'_{\pm}} - 2 \left(\tfrac{\Phi''_{\pm}}{\Phi'_{\pm}} \right)^2 \right) \tfrac{\dot{\Phi}_{\pm}}{\Phi'_{\pm}} \right] - \right.$$
$$\left. -l^{\pm}(s,\tau) \left[b_0\, (\Phi'_{\pm})^2 \mp \tfrac{\kappa}{2} \left(2\, \tfrac{\Phi'''_{\pm}}{\Phi'_{\pm}} - 3 \left(\tfrac{\Phi''_{\pm}}{\Phi'_{\pm}} \right)^2 \right) \right] \right\} = \tag{1.12}$$

$$= \int_0^T d\tau \int ds \sum_{\pm} \left\{ \pm \tfrac{\kappa}{2} \left[\tfrac{\Phi'''_{\pm}}{\Phi'_{\pm}} - \left(\tfrac{\Phi''_{\pm}}{\Phi'_{\pm}} \right)^2 \right] \tfrac{\dot{\Phi}_{\pm}}{\Phi'_{\pm}} \right\} . \tag{1.13}$$

Действие (1.13) совпадает с действием для двумерной конформной гравитации, предложенной в [1]. С другой стороны, если мы положим связи в (1.12) равными нулю, то возникает действие для конформной гравитации

$$S^{gr} = \int_0^T d\tau \int ds \sum_{\pm} \left\{ b_0\, \dot{\Phi}_{\pm}\, \Phi'_{\pm} \pm \tfrac{\kappa}{2} \left(\tfrac{1}{\Phi'_{\pm}} \right)'' \dot{\Phi}_{\pm} \right\} , \tag{1.14}$$

которое было получено в [3], как геометрическое действие на коприсоединенной орбите группы Вирасоро. Как было показано в [3], это действие связано с теорией Лиувиля, если положить $\Phi'_{\pm} = \exp \phi_{\pm}$

$$S^{gr} = \int_0^T d\tau \int ds \sum_{\pm} \left\{ b_0\, l^{\pm} \exp(2\phi_{\pm}) \pm \tfrac{\kappa}{2}\, \phi'_{\pm}\, \dot{\phi}_{\pm} \right\} . \tag{1.15}$$

Заметим, что преобразование $\Phi'_{\pm} = \exp \phi_{\pm}$ значительно упрощает и изначальное гамильтоново действие (1.2), если параллельно сделать каноническое преобразование импульсной переменной

$$P_{\pm}(s,\tau) = -\partial_s \cdot \left(\pi_{\pm}(s,\tau) \exp[-\phi_{\pm}(s,\tau)] \right) , \tag{1.16}$$

после чего (1.2) переписывается в виде

$$S^{gr} = \int_0^T d\tau \int ds \sum_{\pm} \left\{ \phi_{\pm}\, \pi_{\pm} - l^{\pm}(s,\tau) \left[\phi_{\pm}\, \pi_{\pm} - \pi'_{\pm} \mp \tfrac{\kappa}{2} \phi''_{\pm} \right] \right\} . \tag{1.17}$$

Во второй работе [3] было замечено, что скобки Пуассона полей $\Phi_{\pm}$ (с разными временами), которые вытекают из действия (1.14) с $b_0 = 0$, имеют r-матричный вид с классическими r-матрицами, возникающими в теории квантовой группы $SL_q(2)$.

Вычислим коммутатор для $T(s)$ и $T(r)$, где

$$T(s) = \Phi'(s) \frac{\partial}{\partial \Phi(s)} - \frac{\kappa}{2} \ln'' \Phi'(s)$$

Т.к. вычисление этого коммутатора довольно громоздко, его вычисление приведено в конце данной работы (раздел "Выкладки"). Конечное выражение имеет вид

$$[T(s), T(r)] = 2\, T(s)\, \delta'(r-s) - T'(s)\, \delta(r-s) - \kappa\, \delta'''(s-r) . \tag{1.18}$$

2 Решения уравнений движения

В этом разделе мы найдем решения уравнений движения (1.4) и (1.5).

Пусть $\phi(s,\tau)$ — периодическая функция и функция $\Phi_+(s,\tau)=s+\phi(s,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_\tau\Phi_+(s,\tau)=l^+(s,\tau)\partial_s\Phi_+(s,\tau)\quad\Rightarrow\quad\dot{\Phi}_+(s,\tau)=l^+(s,\tau)\partial_s\Phi_+(s,\tau)\ , \tag{2.19}$$

с начальным условием $\Phi_+(s,0)=s$, или $\phi(s,0)=0$. Решением этого уравнения является

$$\begin{aligned}\Phi_+(s,T)=P\exp\Big(\int\limits_0^T d\tau\ l^+(s,\tau)\partial_s\Big)\Phi_+(s,0)=\exp\Big(\bar{l}^+(s,T)\partial_s\Big)\Phi_+(s,0)=\\ =\exp\Big(\bar{l}^+(s,T)\partial_s\Big)\ s=s+\bar{l}^+(s,T)+\tfrac{1}{2}\bar{l}^+(s,T)\partial_s\bar{l}^+(s,T)+\dots\ ,\end{aligned} \tag{2.20}$$

где $P\exp$ обозначает упорядоченную экспоненту и мы ввели в рассмотрение новую периодическую функцию $\bar{l}^+(s,T)$. Такую функцию можно всегда определить, так как операторы $\exp\Big(l^+(s)\partial_s\Big)$ являются элементами группы $\mathsf{Diff}(S^1)$ диффеоморфизмов окружности S^1 и любое произведение таких элементов дает элемент такого же типа. Из (2.20) сразу же следует, что

$$\exp\Big(\bar{l}^+(s,T)\partial_s\Big)\ h(s)=h(\Phi_+(s,T))\ , \tag{2.21}$$

где $h(s)$ — произвольная функция от s.

Найдем интегральное уравнение, связывающее функции $\bar{l}^+(s,T)$ и $\Phi_+(s,T)$. Заметим, что выполняется тождество

$$e^{\bar{l}^+(s,T)\partial_s}\int^s d\ell\frac{1}{\bar{l}^+(\ell,T)}=\int^s d\ell\frac{1}{\bar{l}^+(\ell,T)}+1\ ,$$

которое легко доказывается, если разложить оператор $e^{\bar{l}^+(s,T)\partial_s}$ в ряд Тейлора. Перенося интеграл из правой части в левую и используя (2.21), мы получаем искомое интегральное уравнение

$$\int_s^{\Phi_+(s,T)}\frac{d\ell}{\bar{l}^+(\ell,T)}=1\ ,$$

напоминающее уравнение, связывающее "инвариантный заряд" $\Phi_+(s,T)$ и "бета-функцию" $\bar{l}^+(s,T)$ в теории ренорм-группы. Определим еще одну функцию, аналогичную (2.19),

$$\partial_\tau\Phi_-(s,\tau)=l^-(s,\tau)\partial_s\Phi_-(s,\tau)\quad\Rightarrow\quad\dot{\Phi}_-(s,\tau)=l^-(s,\tau)\partial_s\Phi_-(s,\tau)\ , \tag{2.22}$$

для которой также имеем

$$P\exp\Big(\int\limits_0^T d\tau\ l^-(s,\tau)\partial_s\Big)=\exp\Big(\bar{l}^-(s,\tau)\partial_s\Big)\ ,\qquad\int\limits_s^{\Phi_-(s,T)}\frac{d\ell}{\bar{l}^-(\ell,T)}=1\ .$$

Тогда решение задачи Коши для положения $x_\mu(s,T)$ релятивистской струны с действием (1.1) в момент "времени" T записывается в виде

$$x_\mu(s,T)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Phi_-(s,T)}^{\Phi_+(s,T)}p_\mu(\ell)d\ell+\frac{1}{2}\Big(x_\mu(\Phi_+(s,T))+x_\mu(\Phi_-(s,T))\Big)\ .$$

где $p_\mu(\ell)=p_\mu(\ell,0)$ и $x_\mu(s)=x_\mu(s,0)$ — начальные данные.

3 Примеры движения открытой и замкнутой струн

1. Эллиптическая замкнутая ступа в 3-мерном пространстве-времени
Рассмотрим эллиптическую струну

$$x_0(s,0)=0; \qquad x_1(s,0)=a\cdot\cos(s); \qquad x_2(s,0)=b\cdot\sin(s)$$

со следующим распределением импульса

$$p_0(s,0)=p_0; \qquad p_1(s,0)=0; \qquad p_2(s,0)=0,$$

где a и b – большая и малая полуоси, $s\in[0,2\pi]$, p_0– константа.

Положим $l^+=-l^-=1$, тогда для определения $\Phi_+(\tau,s)$ и $\Phi_-(\tau,s)$ получим следующие уравнения

$$\acute{\Phi}_+(\tau,s)=\dot{\Phi}_+(\tau,s) \qquad \acute{\Phi}_-(\tau,s)=-\dot{\Phi}_-(\tau,s).$$

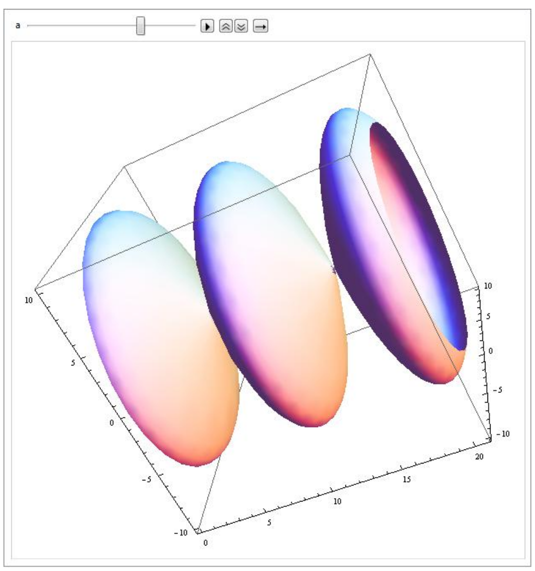
Решая эти уравнения с начальными условиями $\Phi_+(0,s)=\Phi_-(0,s)=s$, получим

$$\Phi_+(\tau,s)=s+\tau \qquad \Phi_-(\tau,s)=s-\tau.$$

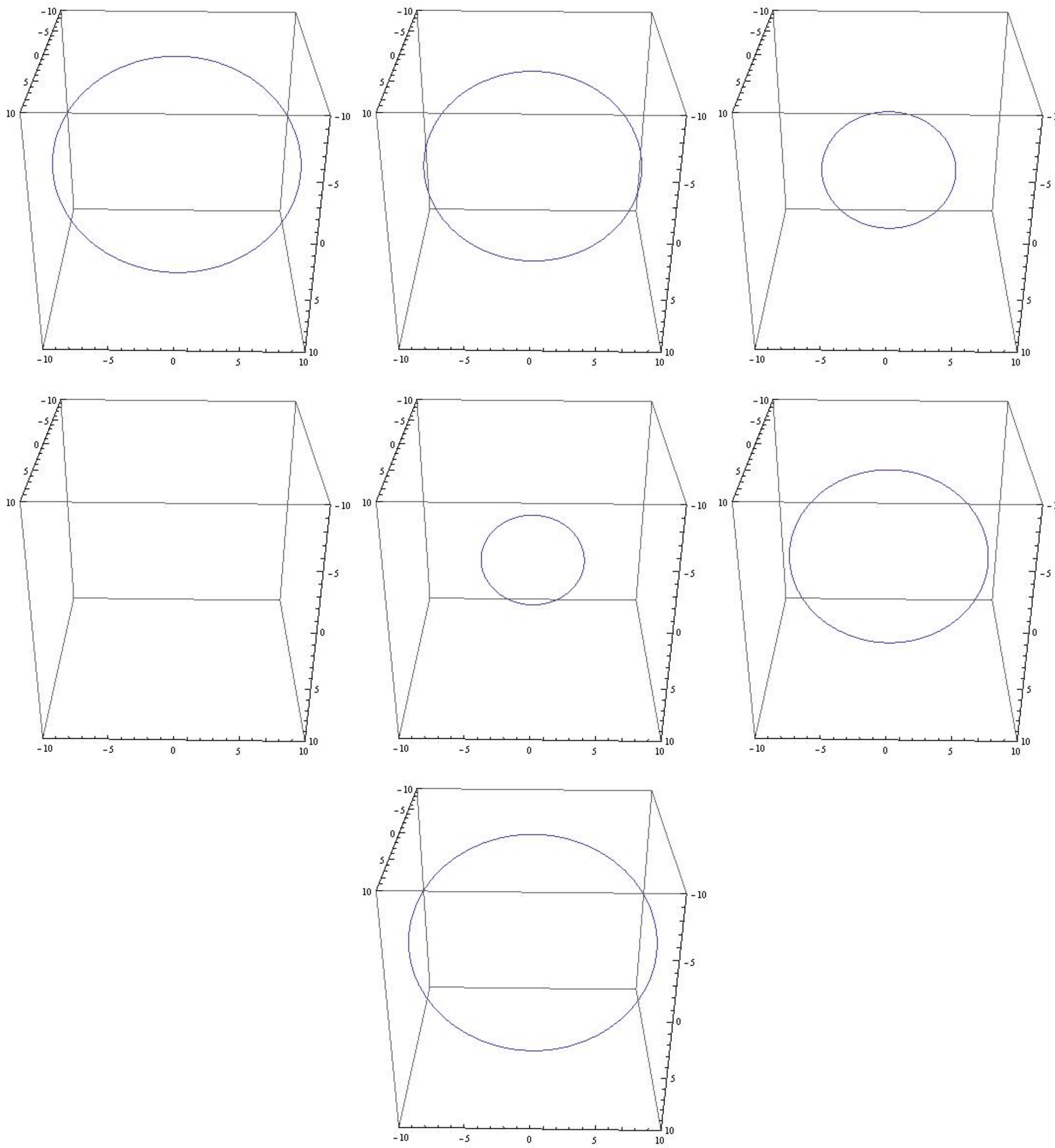
Тогда для $x_\mu(\tau,s)$ получаем следующее решение

$$\begin{gathered} x_0=\frac{1}{2}\int\limits_{\Phi_-(\tau,s)}^{\Phi_+(\tau,s)} p_0=p_0\tau \\ x_1=\frac{1}{2}(x_1(\Phi_+)+x_1(\Phi_-))=a\cdot\cos(s)\cdot\cos(t) \\ x_2=\frac{1}{2}(x_2(\Phi_+)+x_2(\Phi_-))=b\cdot\sin(s)\cdot\cos(t) \end{gathered} \tag{3.23}$$

При $a=b$ (окружность) струна "заметает" поверхность, которая приведена на следующем рисунке



Следует отметить, что через определенные промежутки времени ($\Delta\tau=\pi$) струна сжимается в точку. В [5] доказывается, что такое поведение характерно для любой замкнутой струны, движущейся в 3-хмерном пространстве-времени.
На следующих рисунках показана струна в различные моменты времени



Струна в моменты времени $\tau = 0, \tau = 0.5, \tau = 1, \tau = \frac{\pi}{2}, \tau = 2, \tau = 2.5, \tau = \pi$
.

2. Открытая вращающаяся струна

Рассмотрим открытую струну в 3-мерном пространстве-времени. Как показано в [6], уравнениями движения открытой струны с неймановскими граничными условиями $\partial_\sigma x^\mu(\tau, 0) = \partial_\sigma x^\mu(\tau, \pi)$ являются

$$x^\mu(\tau, \sigma) = q^\mu + \frac{1}{\pi T} P^\mu \tau + i\, l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-i n \tau} \cos n\sigma \;, \tag{3.24}$$

где q^μ - начальное положение ц.м. струны, P^μ - импульс ц.м. струны, T - натяжение струны, $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$.
Как показано в [6], ограничения $\dot{x}^2 + x'^2 = 0$ и $\dot{x}x' = 0$ можно переписать в следующем

виде

$$L_n = \sum_m \alpha_m^\mu \, \alpha_{n-m,\mu} = 0 \; . \tag{3.25}$$

Пусть для $|n| > 1$: $\alpha_n^\mu = 0$. Найдем α_0^μ и α_1^μ. Ограничения $L_n = 0$ дают нам следующие уравнения

$$\begin{gathered} L_0 = \alpha_0^\mu \, \alpha_{0,\mu} + \alpha_1^\mu \, \alpha_{-1,\mu} + \alpha_-^\mu 1 \, \alpha_{1,\mu} = 0 \\ L_1 = \alpha_0^\mu \, \alpha_{1,\mu} + \alpha_1^\mu \, \alpha_{0,\mu} = 0 \\ L_2 = \alpha_1^\mu \, \alpha_{1,\mu} = 0 \end{gathered} \tag{3.26}$$

Решая эти уравнения, получаем следующие значения для α_0^μ, α_1^μ и α_{-1}^μ

$$\begin{aligned} \alpha_0^\mu &= (1,0,0) \\ \alpha_1^\mu &= (0,-\tfrac{i}{2},\tfrac{1}{2}) \\ \alpha_{-1}^\mu &= (0,\tfrac{i}{2},\tfrac{1}{2}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

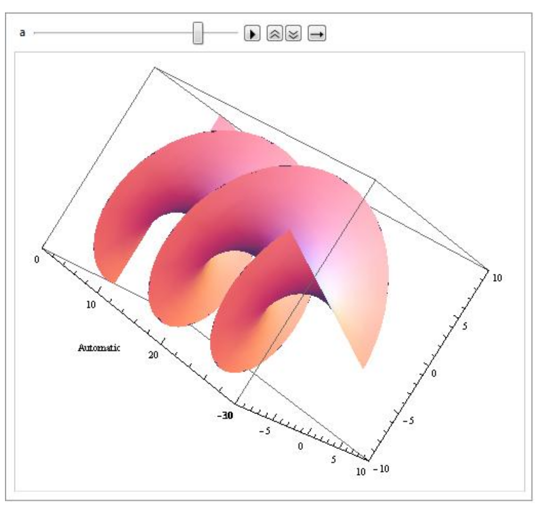
Тогда для $x_\mu(\tau,\sigma)$ получаем следующее решение

$$\begin{aligned} x_0 &= l\,\tau \\ x_1 &= l\,\cos\tau\,\cos\sigma \\ x_2 &= l\,\sin\tau\,\cos\sigma \end{aligned} \tag{3.28}$$

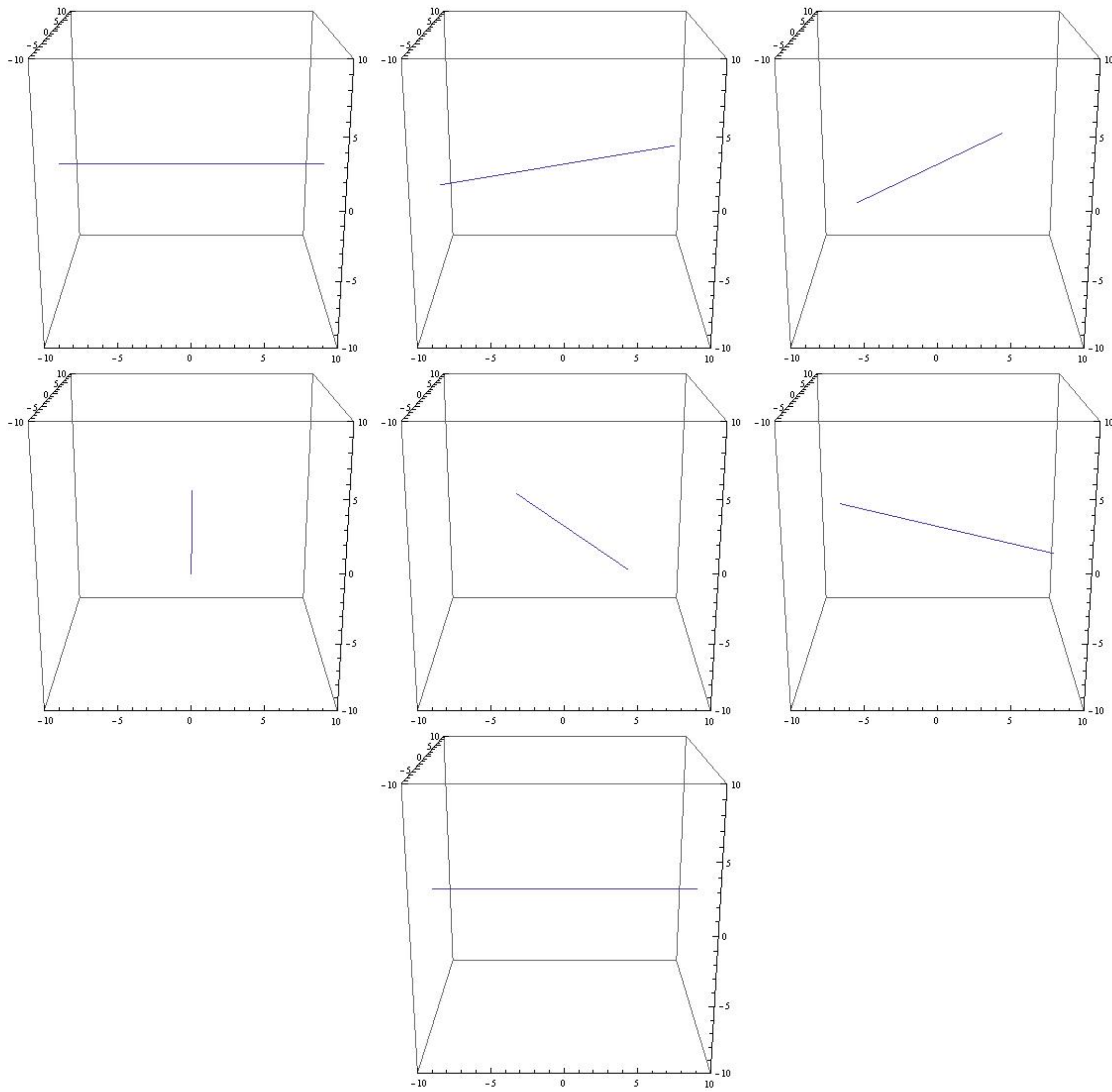
Это решение соответствует вращающейся струне. Из этого решения видно, что ее концы движутся со скоростью света. Покажем это

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = -\sin\tau\,\cos\sigma \\ \dot{x}_2 = \cos\tau\,\cos\sigma \\ \left((\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_1)^2\right)|_{\sigma=0,\pi} = \cos^2\sigma|_{\sigma=0,\pi} = 1 \end{gathered} \tag{3.29}$$

Это не дает ей стянуться в точку под действием собственного натяжение. При своем движении такая струна заметает "винтовую"поверхность, которая приведена на следующем рисунке



На следующих рисунках показана струна в различные моменты времени



Струна в моменты времени $\tau = 0, \tau = 0.5, \tau = 1, \tau = \frac{\pi}{2}, \tau = 2, \tau = 2.5, \tau = \pi$
.

4 Интегралы движения свободной замкнутой релятивистской струны

У этой системы, как хорошо известно [7], имеются следующие связи ($\chi_\alpha = 0$):

$$\chi_0 = \tfrac{1}{2}\left(m^2\, \acute{x}_\mu\, \acute{x}^\mu + \tfrac{1}{m^2}\, p_\mu\, p^\mu\right) \qquad\qquad \chi_1 = \acute{x}_\mu\, p^\mu, \tag{4.30}$$

где m-некоторый параметр размерности массы. Для систем с такими связями роль гамильтониана играет линейная комбинация χ_0 и χ_1 [8]

$$H(\tau) = \int ds\, (V_0(\tau, s)\, \chi_0 + V_1(\tau, s)\, \chi_1) = \chi_0(V_0) + \chi_1(V_1)\ . \tag{4.31}$$

Скобки Пуассона:

$$\{A_\mu(s), B_\nu(r)\} = \int dl \left(\frac{\partial A_\mu(s)}{\partial x_\lambda(l)} \frac{\partial B_\nu(r)}{\partial p^\lambda(l)} - \frac{\partial A_\mu(s)}{\partial p_\lambda(l)} \frac{\partial B_\nu(r)}{\partial x^\lambda(l)} \right) \tag{4.32}$$

Скобки Пуассона координат и импульсов:

$$\begin{gathered}
\{x_\mu(s), x_\nu(r)\} = 0 \\
\{p_\mu(s), p_\nu(r)\} = 0 \\
\{x_\mu(s), p_\nu(r)\} = \delta_{\mu\nu}\delta(s-r) \\
\{\acute{x}_\mu(s), p_\nu(r)\} = \frac{\partial}{\partial s}\{x_\mu(s), p_\nu(r)\} = \delta_{\mu\nu}\acute{\delta}(s-r)
\end{gathered} \tag{4.33}$$

Ведем новые переменные:

$$\begin{aligned}
a_\mu(s,\tau) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(p_\mu(s,\tau) + \acute{x}_\mu(s,\tau)) \\
b_\mu(s,\tau) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(p_\mu(s,\tau) - \acute{x}_\mu(s,\tau))
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Вычислим скобки Пуассона для новых переменных:

$$\begin{gathered}
\underline{\{a_\mu(s), a_\nu(r)\}} = \tfrac{1}{2} \int dl \left(\tfrac{\partial \acute{x}_\mu(s)}{\partial x_\lambda(l)} \delta(r-l)\delta_{\nu\lambda} - \tfrac{\partial \acute{x}_\nu(r)}{\partial x_\lambda(l)} \delta(s-l)\delta_{\mu\lambda} \right) = \\
= \tfrac{1}{2} \int dl (\delta_{\mu\lambda}\acute{\delta}(s-l)\delta(r-l)\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda}\acute{\delta}(r-l)\delta(s-l)\delta_{\mu\nu}) = \\
= \tfrac{1}{2} \int dl (\acute{\delta}(s-l)\delta(r-l) - \acute{\delta}(r-l)\delta(s-l))\delta_{\mu\nu} = \underline{\delta_{\mu\nu}\acute{\delta}(s-r)} \\
\underline{\{b_\mu(s), b_\nu(r)\}} = -\underline{\delta_{\mu\lambda}\acute{\delta}(s-r)} \\
\underline{\{a\mu(s), b_\nu(r)\}} = \tfrac{1}{2} \int dl \left(\acute{\delta}(s-r)\delta_{\mu\lambda}\delta(r-l)\delta_{\nu\lambda} + \acute{\delta}(r-l)\delta_{\nu\lambda}\delta(s-l)\delta_{\mu\lambda} \right) = \\
= -\tfrac{\delta_{\mu\nu}}{2} \int dl \left(\acute{\delta}(l-s)\delta(l-r) + \acute{\delta}(l-r)\delta(l-s) \right) = \\
= -\tfrac{\delta_{\mu\nu}}{2} \int dl \left(\acute{\delta}(l-s)\delta(l-r) - \acute{\delta}(l-s)\delta(l-r) \right) = \underline{0} \\
\underline{\{a_\mu(s), a_\nu^2(r)\}} = \{a_\mu(s), a_\nu(r)\}\, a_\nu(r) + a_\nu(r)\, \{a_\mu(s), a_\nu(r)\} = \\
= 2a_\nu(r)\, \{a_\mu(s), a_\nu(r)\} = \underline{2a_\mu(r)\acute{\delta}(s-r)} \\
\underline{\left\{a_\mu^2(s), a_\nu^2(r)\right\}} = \underline{4a_\mu^2(r)\acute{\delta}(s-r)}
\end{gathered} \tag{4.35}$$

Выберем образующие в пространстве связей следующим образом:

$$\begin{aligned}
M(f) &= \chi_0(f) + \chi_1(f) = \int ds\, f(s) a^2(\tau, s) \\
K(f) &= \chi_0(f) - \chi_1(f) = \int ds\, f(s)\, b^2(\tau, s)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Скобки Пуассона для новых образующих:

$$\underline{\{M(f),M(g)\}} = \int(f(s)a_\lambda(s))ds\int(g(r)a_\lambda(r)\acute{\delta}(s-r))dr+$$
$$\int(f(s)a_\lambda(s)\acute{\delta}(s-r))ds\int(g(r)a_\lambda(r))dr =$$
$$= \int(f(s)\acute{g}(s)-g(s)\acute{f}(s))a_\lambda^2(s)ds = \underline{M(\acute{g}f-\acute{f}g)} \tag{4.37}$$
$$\{K(f),K(g)\} = K(\acute{g}f-\acute{f}g)$$
$$\underline{\dot{a}_\mu(s,\tau)} = \{a_\mu(s,\tau),H(\tau)\} = \int dr(f(r)a_\mu(r)\acute{\delta}(r-s)) = \underline{\tfrac{\partial}{\partial s}(f(s)a_\mu(s,\tau))}$$

Как было показано в [9] любой параметрически инвариантный функционал J, построенный из величин

$$A^1_\mu = \sqrt{2}\int\limits_{s_2}^{s_1} ds\, a_\mu(\tau,s)$$
$$A^2_\mu = \sqrt{2}\int\limits_{s_2}^{s_1} ds\, b_\mu(\tau,s) \tag{4.38}$$
$$A^3_\mu = \int\limits_{s_2}^{s_1} ds\, p_\mu(\tau,s) + x_\mu(\tau,s_1) + x_\mu(\tau,s_2)\ ,$$

будет сохранятся ($\{H,J\}=0$). Там же были найдены следующие производящие функции законов сохранения

$$J_1(q^\mu) = \int\ ds_1\, ds_2 a_\mu(\tau,s_1)\, a_\nu(\tau,s_2)\ \exp\ iq^\mu\, A^1_\mu\ ,$$
$$J_2(q^\mu) = \int\ ds_1\, ds_2 b_\mu(\tau,s_1)\, b_\nu(\tau,s_2)\ \exp\ iq^\mu\, A^2_\mu\ , \tag{4.39}$$
$$J_3(q^\mu) = \int\ ds_1\, ds_2 a_\mu(\tau,s_1)\, b_\nu(\tau,s_2)\ \exp\ iq^\mu\, A^3_\mu\ ,$$

где q^μ - некоторый 4-вектор. Для того, чтобы выполнялось соотношение $\{H,J_\alpha\} = \partial J_\alpha/\partial\tau = 0$ ($\alpha=1,2,3$), необходимо и достаточно наложить на q^μ следующее условие

$$P_\mu\, q^\mu = 2\,\pi\, n\ , \tag{4.40}$$

где $P_\mu = \int\limits_0^{2\pi} p_\mu(s,\tau)\, ds$ - полный импульс, а n - целое число.

Приведем несколько первых законов сохранения.

Первый:

$$J_\mu = \int\limits_0^{2\pi} ds_1 a_\mu(s_1)$$
$$J_\mu = \int\limits_0^{2\pi} ds_1 \tfrac{1}{\sqrt{2}}(p_\mu + \acute{x}_\mu) = \tfrac{P_\mu}{\sqrt{2}} \tag{4.41}$$

Второй:

$$J^{\mu\nu}_\alpha(q=0) = \int\limits_0^{2\pi} ds_1 a^\mu(s) \int\limits_{s_1}^{s_1+2\pi} ds_2 a^\nu(s_2) = \frac{P^\mu P^\nu}{2}$$

Третий:

$$J_{\mu\nu\lambda} = \frac{J_{1\mu\nu}}{\partial q^\lambda}(q, n=0) = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} ds_1 a_\mu(s_1) \int\limits_{s_1}^{s_1+2\pi} ds_2 a_\nu(s_2) \int\limits_{s_1}^{s_2} ds_3 a_\lambda(s_3) \qquad (4.42)$$

Т.к. вычисление этого интеграла движения довольно громоздко, его вычисление приведено в конце данной работы (раздел "Выкладки"). Конечное выражение имеет вид

$$J_{\mu\nu\lambda} = \frac{5}{4}P_\mu P_\nu P_\lambda + \frac{1}{2}\{P_\mu M_{\lambda\nu} + cycle(\mu,\lambda,\nu)\} + \frac{1}{2}\{P_\mu \int\limits_0^{2\pi} ds(\acute{x}_\nu x_\lambda + \acute{\psi}_\nu \psi_\lambda) + cycle(\mu,\lambda,\nu)\}\ , \qquad (4.43)$$

где $\acute{\psi}_\nu = p_\nu - \frac{P_\nu}{2\pi}$.

Из законов сохранения импульса и момента импульса следует закон сохранения величины

$$t_{\mu\nu\lambda} = P_\mu \int\limits_0^{2\pi} ds(\acute{x}_\nu x_\lambda + \acute{\psi}_\nu \psi_\lambda) + cycle(\mu,\lambda,\nu) \qquad (4.44)$$

Рассмотрим эводюцию $J_{\mu\nu} = \int\limits_0^{2\pi} ds(\acute{x}_\mu x_\nu + \acute{\psi}_\mu \psi_\nu)$:

$$\dot{J}_{\mu\nu} = \{J_{\mu\nu}, H\}$$
$$\dot{J}_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dl f(l)\left[P_\nu a_\mu - P_\mu a_\nu\right] \qquad (4.45)$$

Легко увидеть, исходя из вида этого выражения, что величина $t_{\mu\nu\lambda}$ действительно сохраняется. Покажем это

$$\dot{t}_{\mu\nu\lambda} = P_\mu\,\dot{J}_{\mu\nu} + cycle(\mu,\lambda,\nu) =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dl f(l)\left[P_\mu P_\lambda a_\nu - P_\mu P_\nu a_\lambda + P_\lambda P_\nu a_\mu - P_\lambda P_\mu a_\nu + P_\nu P_\mu a_\lambda - P_\nu P_\lambda a_\mu\right] = 0\ . \qquad (4.46)$$

5 Выкладки

Коммутатор

$$[T(s), T(r)] = \Phi'(s)\,\Phi'(r)\,\frac{\partial^2}{\partial\Phi(s)\partial\Phi(r)} + \Phi'(s)\,\delta'(r-s)\,\frac{\partial}{\partial\Phi(r)} - \frac{\kappa}{2}\,\Phi'(s)\,\left(\frac{\delta'(r-s)}{\Phi'(r)}\right)'' -$$
$$\frac{\kappa}{2}\,\Phi'(s)\,\ln''\Phi'(r)\,\frac{\partial}{\partial\Phi(s)} - \frac{\kappa}{2}\,\Phi'(r)\,\ln''\Phi'(s)\,\frac{\partial}{\partial\Phi(r)} + \frac{\kappa^2}{4}\,\ln''\Phi'(s)\,\ln''\Phi'(r) - \ldots\ . \qquad (5.47)$$

Точками обозначено такое же выражение, в котором $r \leftrightarrow s$. Легко увидеть, что 1-й, 4-й, 5-й и 6-й члены приведенного выше выражения сокращаются с соответствующими членами выражения, обозначенного точками. Следовательно

$$[T(s),T(r)] = \Phi'(s)\,\delta'(r-s)\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(r)} - \Phi'(r)\,\delta'(s-r)\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(s)} - \\ \tfrac{\kappa}{2}\,\Phi'(r)\,\left(\tfrac{\delta'(s-r)}{\Phi'(s)}\right)'' - \tfrac{\kappa}{2}\,\Phi'(s)\,\left(\tfrac{\delta'(r-s)}{\Phi'(r)}\right)'' \,. \tag{5.48}$$

Рассмотрим первую строчку этого выражения. Пользуясь свойствами δ-функции, первое слагаемое в левой части равенства можно переписать следующим образом

$$\Phi'(s)\,\delta'(r-s)\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(r)} = -\Phi'(s)\,\left(\delta(s-r)\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(r)}\right)' = -\Phi'(s)\,\left(\delta(s-r)\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(s)}\right)' = \\ -\Phi'(s)\,\delta'(s-r)\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(s)} - \Phi'(s)\,\delta(s-r)\,\left(\tfrac{\partial}{\partial\Phi(s)}\right)' \,. \tag{5.49}$$

Переписываем второе слагаемое

$$\Phi'(r)\,\delta'(s-r)\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(s)} = \left(\Phi'(r)\,\delta(s-r)\right)'_s\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(s)} = \left(\Phi'(s)\,\delta(s-r)\right)'\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(s)} = \\ \Phi''(s)\,\delta(s-r)\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(s)} + \Phi'(s)\,\delta'(s-r)\,\tfrac{\partial}{\partial\Phi(s)} \,. \tag{5.50}$$

Рассмотрим теперь вторую строчку. Перепишем первое слагаемое

$$\tfrac{\kappa}{2}\,\Phi'(r)\,\left(\tfrac{\delta'(s-r)}{\Phi'(s)}\right)'' = \tfrac{\kappa}{2}\,\left(\tfrac{(\delta(s-r)\,\Phi'(r))'_s}{\Phi'(s)}\right)'' = \\ \tfrac{\kappa}{2}\,\left(\tfrac{(\delta(s-r)\,\Phi'(s))'_s}{\Phi'(s)}\right)'' = \tfrac{\kappa}{2}\,\left(\delta'(s-r) + \delta(s-r)\,\ln'\Phi'(s)\right)'' = \\ \tfrac{\kappa}{2}\,\delta'''(s-r) + \left(\delta(s-r)\,\ln'\Phi'(r)\right)''_s = \tfrac{\kappa}{2}\,\delta'''(s-r) + \delta''(s-r)\,\ln'\Phi'(r) \,. \tag{5.51}$$

Перепишем второе слагаемое из второй строчки

$$\tfrac{\kappa}{2}\,\Phi'(s)\,\left(\tfrac{\delta'(r-s)}{\Phi'(r)}\right)'' = \tfrac{\kappa}{2}\,\left(\tfrac{(\delta(r-s)\,\Phi'(s))'_r}{\Phi'(r)}\right)'' = \\ \tfrac{\kappa}{2}\,\left(\tfrac{(\delta(r-s)\,\Phi'(r))'}{\Phi'(r)}\right)'' = \tfrac{\kappa}{2}\,\left(\delta'(r-s) + \delta(r-s)\,\ln'\Phi'(r)\right)'' = \\ \tfrac{\kappa}{2}\,\delta'''(r-s) + \delta(s-r)\,\ln'''\Phi'(r) + 2\,\delta'(r-s)\,\ln''\Phi'(r) + \delta''(r-s)\,\ln'\Phi'(r) \,. \tag{5.52}$$

Учитывая приведенные выше выкладки, получаем окончательное выражение для коммутатора

$$[T(s),T(r)] = 2\,T(s)\,\delta'(r-s) - T'(s)\,\delta(r-s) - \kappa\,\delta'''(s-r)) \,. \tag{5.53}$$

Интеграл движения

$$
\begin{gathered}
J_{\mu\nu\lambda} = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} ds_1 a_\mu(s_1) \int\limits_{s_1}^{s_1+2\pi} ds_2 a_\nu(s_2) \int\limits_{s_1}^{s_2} ds_3 a_\lambda(s_3) = \\
\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} ds_1 (p_\mu(s_1) + x'_\mu(s_1)) \int\limits_{s_1}^{s_1+2\pi} ds_2 (p_\nu(s_2) + x'_\nu(s_2)) \int\limits_{s_1}^{s_2} ds_3 (p_\lambda(s_3) + x'_\lambda(s_3)) \, .
\end{gathered} \tag{5.54}
$$

Распишем последнюю строчку, опуская пределы интегрирования и переменные интегрирования, подразумевая их наличие:

$$
\begin{gathered}
\int (p_\mu + x'_\mu) \int (p_\nu + x'_\nu) \int (p_\lambda + x'_\lambda) = \int p_\mu \int p_\nu \int p_\lambda + \int p_\mu \int p_\nu \int x'_\lambda + \int p_\mu \int x'_\nu \int p_\lambda \\
+ \int p_\mu \int x'_\nu \int x'_\lambda + \int x'_\mu \int p_\nu \int p_\lambda + \int x'_\mu \int p_\nu \int x'_\lambda + \int x'_\mu \int x'_\nu \int p_\lambda + \int x'_\mu \int x'_\nu \int x'_\lambda \, .
\end{gathered} \tag{5.55}
$$

Распишем каждое слагаемое по отдельности (кроме первого)

$$
\begin{gathered}
\underline{\int p_\mu \int p_\nu \int x'_\lambda} = \underline{\int p_\mu \int p_\nu x_\lambda - P_\nu \int p_\mu x_\lambda} \\
\underline{\int p_\mu \int x'_\nu \int p_\lambda} = \int p_\mu \left(x_\nu(2\pi + s) \int\limits_s^{s+2\pi} p_\lambda - 0 - \int x_\nu p_\lambda \right) = \underline{P_\lambda \int p_\mu \int x_\nu - \int p_\mu \int x_\nu p_\lambda} \\
\underline{\int p_\mu \int x'_\nu \int x'_\lambda} = \int p_\mu \left(\int\limits_s^{s+2\pi} x'_\nu (x_\lambda - x_\lambda(s)) \right) = \underline{\int p_\mu \int x'_\nu x_\lambda} \\
\underline{\int x'_\mu \int p_\nu \int x'_\lambda} = \int x'_\mu \left(\int p_\nu (x_\lambda - x_\lambda(s)) \right) = \int x'_\mu \int p_\nu x_\lambda - P_\nu \int x'_\mu x_\lambda = \\
x_\mu(2\pi) \int\limits_{2\pi}^{4\pi} p_\nu x_\lambda - x_\mu(0) \int\limits_0^{2\pi} p_\nu x_\lambda - P_\nu \int x'_\mu x_\lambda = \underline{-P_\nu \int x'_\mu x_\lambda} \\
\underline{\int x'_\mu \int p_\nu \int p_\lambda} = x_\mu(2\pi) \int\limits_{2\pi}^{4\pi} p_\nu \int p_\lambda - x_\mu(0) \int\limits_0^{2\pi} p_\nu \int p_\lambda - P_\lambda \int x_\mu p_\nu + P_\nu \int x_\mu p_\lambda = \underline{-P_\lambda \int x_\mu p_\nu + P_\nu \int x_\mu p_\lambda} \\
\underline{\int x'_\mu \int x'_\nu \int p_\lambda} = \int x'_\mu \left(x_\nu(s + 2\pi) P_\lambda - x_\nu(s) \cdot 0 - \int x_\nu p_\lambda \right) = P_\lambda \int x'_\mu x_\nu - \int x'_\mu \int x_\nu p_\lambda = \\
P_\lambda \int x'_\mu x_\nu - \left(\int\limits_{2\pi}^{4\pi} x_\nu p_\lambda - x_\mu(0) \int\limits_0^{2\pi} x_\nu p_\lambda - \int x_\mu \cdot 0 \right) = \underline{P_\lambda \int x'_\mu x_\nu} \\
\underline{\int x'_\mu \int x'_\nu \int x'_\lambda} = \int x'_\mu \int x'_\nu (x_\lambda - x_\lambda(s)) = \int x'_\mu \int x'_\nu x_\lambda = \underline{0} \, .
\end{gathered} \tag{5.56}
$$

Учитывая приведенные выше выкладки, получаем следующее выражение для $J_{\mu\nu\lambda}$

$$
\begin{gathered}
\underline{2J_{\mu\nu\lambda}} = \int p_\mu \int p_\nu p_\lambda + \int p_\mu \int p_\nu x_\lambda - P_\nu \int p_\mu x_\lambda + P_\lambda \int p_\mu \int x_\nu - \int p_\mu \int x_\nu p_\lambda \\
+ \int p_\mu \int x'_\nu x_\lambda - P_\nu \int x'_\mu x_\lambda - P_\lambda \int x_\mu p_\nu + P_\nu \int x_\mu p_\lambda + P_\lambda \int x'_\mu x_\nu = \\
\left\{ \int p_\mu \int p_\nu p_\lambda + P_\mu M_{\lambda\nu} + P_\nu M_{\mu\lambda} + P_\lambda M_{\nu\mu} \right\} + \int p_\mu \int x'_\nu x_\lambda - P_\nu \int x_\mu x_\lambda + P_\lambda \int x'_\mu x_\nu = \\
... - P_\mu \int x'_\lambda x_\nu - P_\nu \int x'_\mu x_\lambda - P_\lambda \int x'_\nu x_\mu = \\
\underline{\int p_\mu \int p_\nu p_\lambda + P_\mu M_{\lambda\nu} + P_\nu M_{\mu\lambda} + P_\lambda M_{\nu\mu} + P_\mu \int x'_\nu x_\lambda + P_\nu \int x'_\lambda x_\mu + P_\lambda \int x'_\mu x_\nu} \, .
\end{gathered} \tag{5.57}
$$

Распишем теперь первое слагаемое с учетом замены $p_\mu = \psi'_\mu + \frac{P_\mu}{2\pi}$. Путем несложных преобразований получаем следующее выражение

$$\int p_\mu \int p_\nu \int p_\lambda = \frac{5}{2} P_\mu P_\nu P_\lambda + P_\mu \int \psi'_\nu \psi_\lambda + P_\lambda \int \psi'_\mu \psi_\nu + P_\nu \int \psi'_\lambda \psi_\mu \,. \tag{5.58}$$

С учетом этого выыражения получаем окончательное выражение для $J_{\mu\nu\lambda}$

$$J_{\mu\nu\lambda} =$$

$$\frac{5}{4} P_\mu P_\nu P_\lambda + \frac{1}{2}\{P_\mu M_{\lambda\nu} + cycle(\mu, \lambda, \nu)\} + \frac{1}{2}\{P_\mu \int\limits_0^{2\pi} ds (\acute{x}_\nu x_\lambda + \acute{\psi}_\nu \psi_\lambda) + cycle(\mu, \lambda, \nu)\} \,. \tag{5.59}$$

Список литературы

[1] A.M.Polyakov, *Quantum Gravity in two dimensions,* Mod.Phys.Lett. A **2** No.11 (1987) 893-898.

[2] A.M.Polyakov, *Quantum geometry of bosonic, fermionic strings,* Phys.Lett. **B103** (1981) 207-210, 211-214.

[3] A.A.Alekseev and S.Shatashvili, *Path Integral Quantization of the Coadjoint Orbits of the Virasoro Group and 2-d Gravity,* Nucl.Phys. **B 323** (1989) 719-733;

A.A.Alekseev and S.Shatashvili, *From Geometric Quantization to Conformal Field Theory,* Comm.Math.Phys., **128** (1990) 197-212.

[4] А.П.Исаев, *Дискретные системы с киральной структурой и квантовые симметрии,* Диссертиция, Дубна 1997

[5] Пронько Г.П., Разумов А.В., Соловьев Л.Д., *Классическая динамика релятивистской струны,* ЭЧАЯ (1983) Т. 14, № 3. с.558

[6] B.Zwiebach, *A First Course in String Theory*

[7] J.Scherk, *An introduction to the theory of dual models and strings,* Rev. Mod. Phys. **47**, 123 (1975)

[8] П.Дирак, *Лекции по квантовой механике,* 1968

[9] А.П.Исаев, *Бесконечный набор законов сохранения для релятивистской струны,* Письма в ЖЭТФ, т. 33, вып. 7 (1981) 357-360