

Московский ордена Трудового Красного Знамени
физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра физики фундаментальных и прикладных проблем
физики микромира

Объединенный институт ядерных исследований
Учебно-научный центр

Барышников Ю.Н.

Резонанс Фано в квантовых системах и
явление индуцированной прозрачности

Бакалаврская работа

Научный руководитель
д.ф.-м.н. НАЗМИТДИНОВ Р.Г.

Дубна Июнь 2014

Содержание

1	Аннотация	2
2	Резонанс Фано	3
2.1	Введение	3
2.2	Механическая аналогия	4
2.3	Квантовый случай	5
2.4	Фано резонанс в двумерном волноводе с квантовой точкой	6
3	Индукцированная прозрачность	10
4	Заключение	12

1 Аннотация

В данной бакалаврской работе рассмотрен Фано резонанс с асимметричным профилем в следующих квантовых системах: атомная система с непрерывным спектром и одним дискретным уровнем, двумерный волновод с потенциальной ямой (квантовой точкой). Рассмотрена механическая аналогия и причины появления асимметричного профиля резонанса. Обсуждено явление индуцированной прозрачности (EIT).

2 Резонанс Фано

2.1 Введение

Резонанс Фано - тип резонанса, возникающий в результате интерференции волновых процессов. Для резонанса Фано характерен асимметричный профиль. В 1935 году Бойтлер [1] наблюдал в спектрах поглощения благородных газов линии с ярко выраженной асимметрией профиля. Теоретическое описание таких резонансов было развито независимо Фешбахом [2] в ядерной физике с помощью проекционных операторов и Фано [3] в атомной физике на языке квантомеханического принципа суперпозиции.

Типичный профиль сечения:

$$\sigma = \frac{(\epsilon + q)^2}{\epsilon^2 + 1}, \quad (1)$$

где q - параметр асимметрии формы, ϵ - нормированная энергия

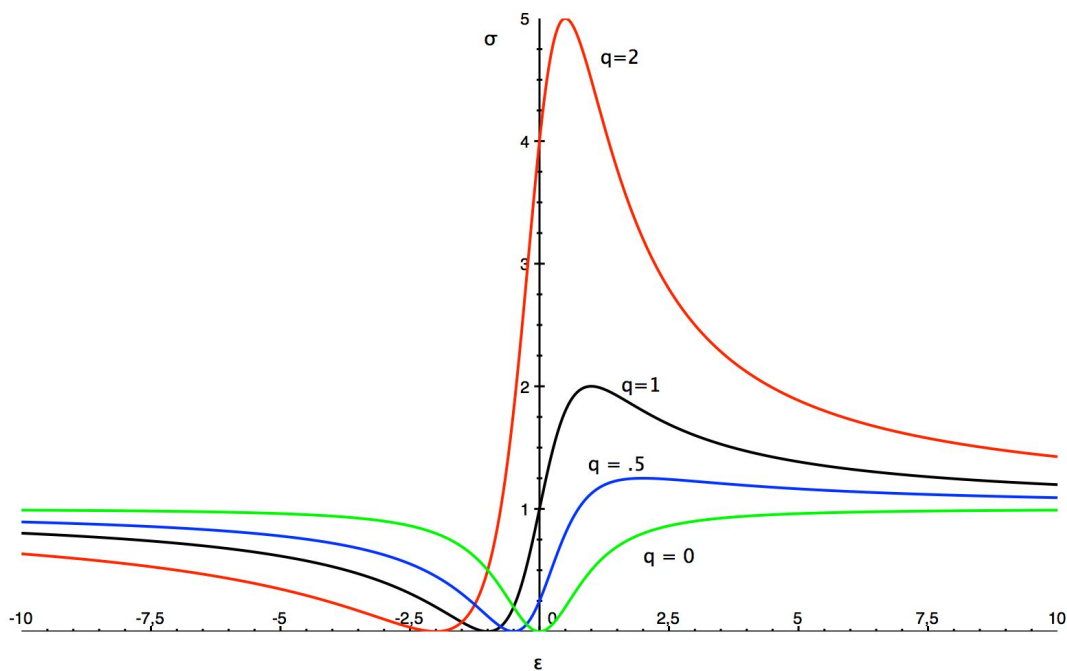


Рис. 1: Зависимость сечения σ от энергии ϵ

Как видно из рис. 1, параметр q определяет асимметрию формы сечения: при $q = 0$, асимметрия отсутствует. Резонанс Фано имеет один максимум при $\epsilon = 1/q$ и минимум при $\epsilon = -q$. При $q \rightarrow \infty$ резонанс становится симметричным, с лоренцовым профилем, что соответствует резонансу Брейта-Вигнера.

2.2 Механическая аналогия

Как было отмечено во введении, резонанс Фано возникает в результате интерференции двух волновых процессов. Поэтому для построения механической аналогии минимально потребуется два осциллятора со связью [4]. Уравнения движения для такой системы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + v_{12} x_2 &= a_1 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + v_{12} x_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где ω_j , $j = 1, 2$ - собственные частоты осцилляторов; γ_j , $j = 1, 2$ - коэффициенты, определяющие затухание (аналог ширины уровня энергии Γ для атомного уровня); v_{12} - коэффициент связи между двумя осцилляторами. Ищем решение в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 e^{i\omega t} \\ x_2 &= c_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив в (2), имеем следующее выражение для амплитуд c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega}{(\omega_1^2 - \omega^2 + i\gamma_1\omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega) - v_{12}^2} a_1 \\ c_2 &= \frac{v_{12}}{(\omega_1^2 - \omega^2 + i\gamma_1\omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + i\gamma_2\omega) - v_{12}^2} a_1 \end{aligned} \quad (4)$$

В данной аналогии второй осциллятор соответствует квантовому состоянию из непрерывного спектра. Поэтому положим $\gamma_2 = 0$.

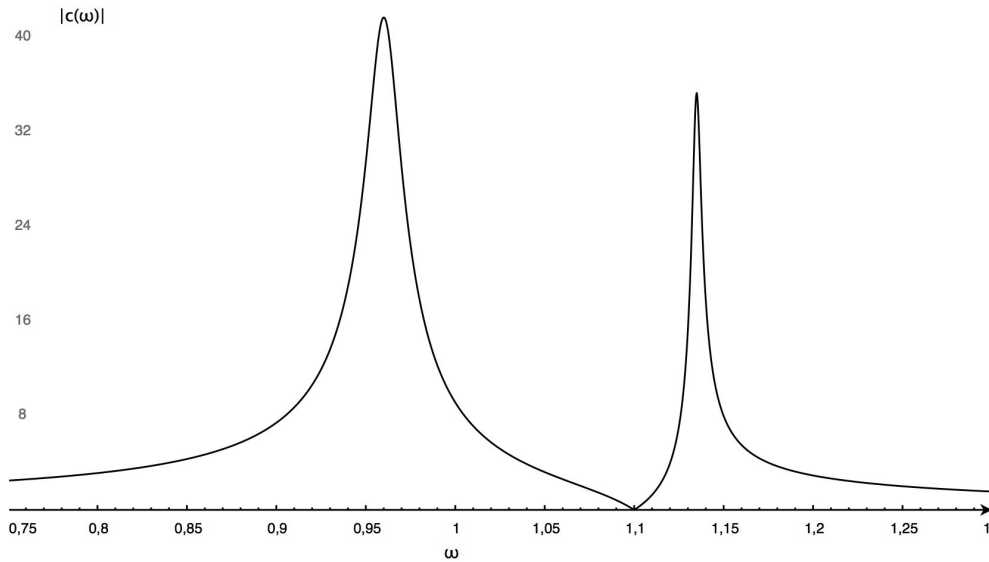


Рис. 2: Зависимость амплитуды $|c_1(\omega)|$ от частоты ω

На рис. 2 построен график для амплитуды колебаний первого осциллятора $|c_1|$ (в единицах a_1) в зависимости от частоты ω (в единицах ω_1), при значениях $\omega_2^2 = 1.1\omega_1^2$, $\gamma_1 = 0.025\omega_1$, $v_{12} = 0.15\omega_1$, $\gamma_2 = 0$.

Как видно из графика, наблюдается два резонанса: резонанс лоренцевой формы при $\omega \approx 0.96$ и резонанс с асимметричным профилем вида Фано при $\omega \approx 1.13$. Заметим, что при $c(\omega_2) = 0$. Это означает, что при воздействии силы на первый осциллятор с частотой ω_2 , вся энергия передается второму осциллятору. При $\gamma_2 \neq 0$, $c(\omega)$ не обращается в нуль нигде, и такого явления не наблюдается.

2.3 Квантовый случай

Рассмотрим атомную систему с квантовыми состояниями, среди которых есть состояния, отвечающие непрерывному спектру $\psi_{E'}$, а также состояние, отвечающее - дискретному ϕ [3]. Каждое состояние невырожденно (этого можно добиться, например, фиксированием определенных квантовых чисел). Пусть H - гамильтониан системы, тогда:

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = E_\phi, \quad (5)$$

$$\langle \psi_{E'} | H | \phi \rangle = V_{E'}, \quad (6)$$

$$\langle \psi_{E''} | H | \psi_{E'} \rangle = E' \delta(E'' - E') \quad (7)$$

Как видно из (7), гамильтониан уже диагонализирован на волновых функциях непрерывного спектра. Дискретный энергетический уровень E_ϕ лежит в непрерывном спектре. Диагонализация гамильтониана проводится стандартным способом: собственное состояние представляет собой суперпозицию состояний:

$$\Psi_E = a\phi + \int dE' b_{E'} \psi_{E'} \quad (8)$$

где коэффициенты a и b зависят от E , и являются решениями системы уравнений:

$$E_\phi a + \int dE' V_{E'}^* b_{E'} = E a, \quad (9)$$

$$V_{E'} + E' b_{E'} = E b_{E'} \quad (10)$$

Решение данной системы:

$$a = \sin\Delta / \pi V_E, \quad (11)$$

$$b_{E'} = \frac{V_{E'}}{\pi V_{E'}^*} \frac{\sin\Delta}{E - E'} - \cos\Delta \delta(E - E') \quad (12)$$

Рассмотрим теперь амплитуду возбуждения атома. Пусть T - оператор перехода. Тогда амплитуда перехода атома из некоторого начального состояния i , в конечное Ψ_E :

$$\langle \Psi_E | T | i \rangle = \frac{1}{\pi V_E^*} \langle \Phi | T | i \rangle \sin\Delta - \langle \psi_E | T | i \rangle \cos\Delta \quad (13)$$

Из (13), видно, что амплитуда возбуждения атома складывается из двух амплитуд, интерферирующих между собой. Иными словами, у атомной системы есть два способа возбудиться: через дискретное состояние ϕ и через непрерывный спектр ψ_E . Эти две амплитуды интерферируют между собой в противоположной фазе. При определенном значении Δ вероятность возбуждения обращается в нуль. Действительно, при

$$tg\Delta = tg\Delta_0 = \frac{\pi V_{E_0}^* \langle \psi_{E_0} | T | i \rangle}{\langle \Phi | T | i \rangle} \rightarrow \langle \Psi_E | T | i \rangle = 0 \quad (14)$$

Отношение вероятности возбуждения $|\langle \Psi_E | T | i \rangle|^2$ к вероятности $|\langle \psi_E | T | i \rangle|^2$ перехода в континуум описывается семейством кривых (1):

$$\frac{|\langle \Psi_E | T | i \rangle|^2}{|\langle \psi_E | T | i \rangle|^2} = \frac{(\epsilon + q)^2}{\epsilon^2 + 1}, \quad (15)$$

где ϵ - нормированная энергия, q - параметр асимметрии, для которого можно получить следующее выражение:

$$q = \frac{\langle \Phi | T | i \rangle}{\pi V_E^* \langle \psi_E | T | i \rangle} \quad (16)$$

2.4 Фано резонанс в двумерном волноводе с квантовой точкой

Рассмотрим прохождение электрона через двумерный волновод ширины W вдоль оси x с квантовой точкой [4]. Конфигурация волновода отображена на рис. 3.

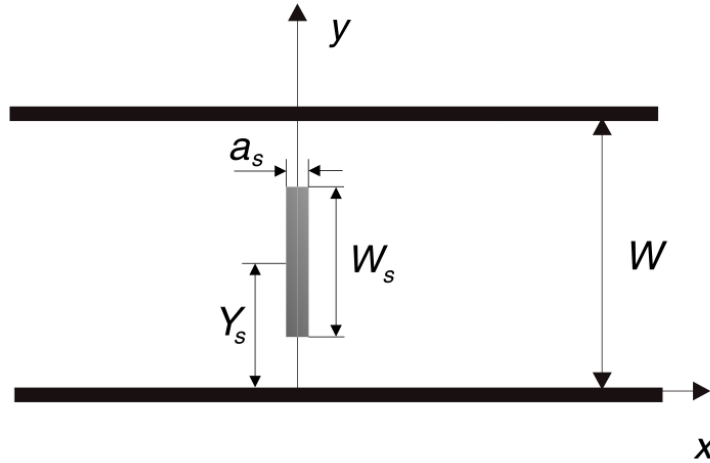


Рис. 3: Схема двумерного волновода с квантовой точкой

На схеме серым обозначен притягивающий потенциал. Пусть $V_c(y)$ - потенциал внутри волновода, потенциал квантовой точки обозначим $V(x, y)$. Уравнение Шредингера для данного волновода:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y) + V_c(y)\Psi(x, y) + V(x, y)\Psi(x, y) = E\Psi(x, y) \quad (17)$$

В качестве граничных условий примем, что при $x \rightarrow \pm\infty$ волновая функция должна переходить в волну де Бройля. Напомним, что в волноводе без квантовой точки имеется полный набор функций $\phi_n(y)$ электрона в поперечном направлении с энергией $E_n = \hbar^2\pi^2n^2/2mW^2$ (m - эффективная масса). Полная волновая функция в таком волноводе будет иметь вид $e^{\pm k_n x}\phi_n(y)$, где $k = \sqrt{2m(E - E_n)}/\hbar$. Поступим подобным образом в случае наличия квантовой точки в волноводе. Будем искать решение уравнения Шредингера (17) в виде:

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\phi_n(y) \quad (18)$$

Подставив это разложение, получим уравнение на неизвестные $\psi_n(x)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_n(x) + \sum_{n'=1}^{\infty} V_{nn'}(x)\psi_{n'}(x) = (E - E_n)\psi_n(x), \quad (19)$$

где матричные элементы потенциала имеют вид:

$$V_{nn'}(x) = \int \phi_n(y)V(x, y)\phi_{n'}(y)dy \quad (20)$$

Так как уравнение 19 не решается в общем виде, мы будем считать, что потенциальная яма квантовой точки гораздо меньше длины волны электрона. Тогда ее можно будет аппроксимировать дельта-функцией. Итак:

$$V_{nn'}(x) = -\frac{\hbar^2}{m}v_{nn'}\delta(x) \quad (21)$$

Тогда условия сшивки будут выглядеть следующим образом:

$$\psi_n(0+) = \psi_n(0-) \quad (22)$$

$$\psi'_n(0+) - \psi'_n(0-) = -2 \sum_{n'=1}^{\infty} v_{nn'}\psi_{n'}(0\pm) \quad (23)$$

Пусть теперь энергия проходящего электрона находится в интервале $E_1 < E < E_2$. Рассмотрим первые два канала. Решения будем искать в виде:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} a_1 e^{ik_1 x} + b_e^{-ik_1 x}, & x < 0, \\ c_1 e^{ik_1 x}, & x > 0, \end{cases}$$

где $k_1 = \sqrt{2m(E - E_1)}/\hbar$. Для волновой функции второго канала, имеем:

$$\psi_2(x) = \begin{cases} b_2 e^{|k_2|x}, & x < 0, \\ c_2 e^{-|k_2|x}, & x > 0, \end{cases}$$

где $|k_2| = \sqrt{2m(E_2 - E)}/\hbar$. Эти две волны интерферируют между собой в волноводе. Учитывая граничные условия (22), имеем следующие уравнения для амплитуд c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} (ik_1 + v_{11})c_1 + v_{12}c_2 &= ik_1 a_1, \\ v_{12}c_1 + (-|k_2| + v_{22})c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Отсюда немедленно получаем:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{ik_1(-|k_2| + v_{22})}{(ik_1 + v_{11})(-|k_2| + v_{22}) - v_{12}^2} a_1 \\ c_2 &= -\frac{ik_1 v_{12}}{(ik_1 + v_{11})(-|k_2| + v_{22}) - v_{12}^2} a_1 \end{aligned} \quad (25)$$

Коэффициент прохождения

$$t_{11} = \frac{c_1}{a_1} = \frac{ik_1(-|k_2| + v_{22})}{(ik_1 + v_{11})(-|k_2| + v_{22}) - v_{12}^2} \quad (26)$$

обращается в нуль, если $-|k_2| + v_{22} = 0$. В этом случае коэффициент отражения

$$r_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{-v_{11}(-|k_2| + v_{22}) + v_{12}^2}{(ik_1 + v_{11})(-|k_2| + v_{22}) - v_{12}^2} \quad (27)$$

обращается в -1. Это происходит при энергии

$$E_{\text{zero}} = E_2 - \frac{\hbar^2 v_{22}^2}{2m} \quad (28)$$

Аналогично, можно найти решение уравнения $r_{11} = 0$:

$$v_{11}(-|k_2| + v_{22}) - v_{12}^2 = 0 \quad (29)$$

Коэффициент отражения обращается в нуль, а коэффициент отражения обращается в 1 при энергии

$$E_{\text{max}} = E_2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left(v_{22} - \frac{v_{12}^2}{v_{11}} \right) > E_{\text{zero}} \quad (30)$$

На рис. 4 изображена зависимость $T(E) = |t_{11}(E)|^2$

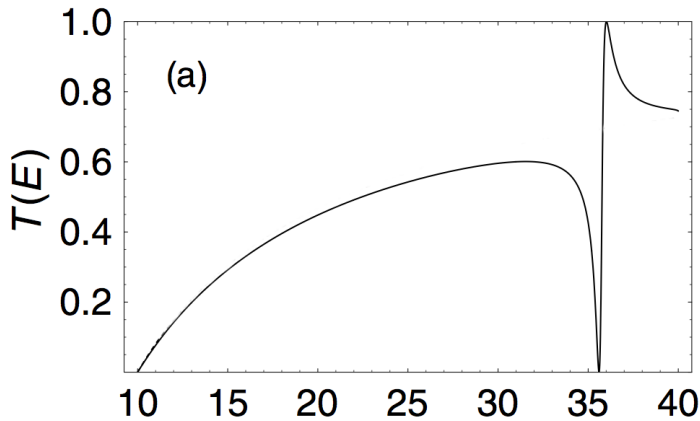


Рис. 4: Фано резонанс в волноводе

Раскладывая (26) около $E = E_{\text{zero}}$, можно убедиться, что

$$t_{11}(E) \sim \frac{E - E_{\text{zero}}}{E - E_{\text{max}} + i\Gamma}, \quad (31)$$

где $\Gamma = \hbar^2 v_{12}^2 k_1 v_{22} / m(k_1^2 + v_{11}^2)$. Таким образом, наблюдается Фано резонанс с коэффициентом асимметрии $q = v_{11}/k_1$.

3 Индуцированная прозрачность

Пусть у нас имеется среда, поглощающая свет определенных частот. Воздействуем на нее источником фотонов, который эта среда поглощает. При добавлении второго источника, фотоны которого также поглощаются, среда становится прозрачной для первого источника. В этом заключается явление электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЕИТ, electromagnetically induced transparency).

Обратимся еще раз к механической аналогии в разделе 2.2. Положим $\omega_1 = \omega_2 = \omega_s$, посмотрим на мощность, поглощаемую первым осциллятором

$$P(t) = ae^{-i\omega_s t} \dot{x}_1(t) \tag{32}$$

Учитывая выражения для амплитуд, получаем следующее выражение для мощности, поглощенной за период:

$$P(\omega_s) = -\frac{2\pi i a^2 \omega_s (\omega^2 - \omega_s^2 - i\gamma_2 \omega_s)}{(\omega^2 - \omega_s^2 - i\gamma_1 \omega_s)(\omega^2 - \omega_s^2 + i\gamma_2 \omega_s) - v_{12}^2}$$

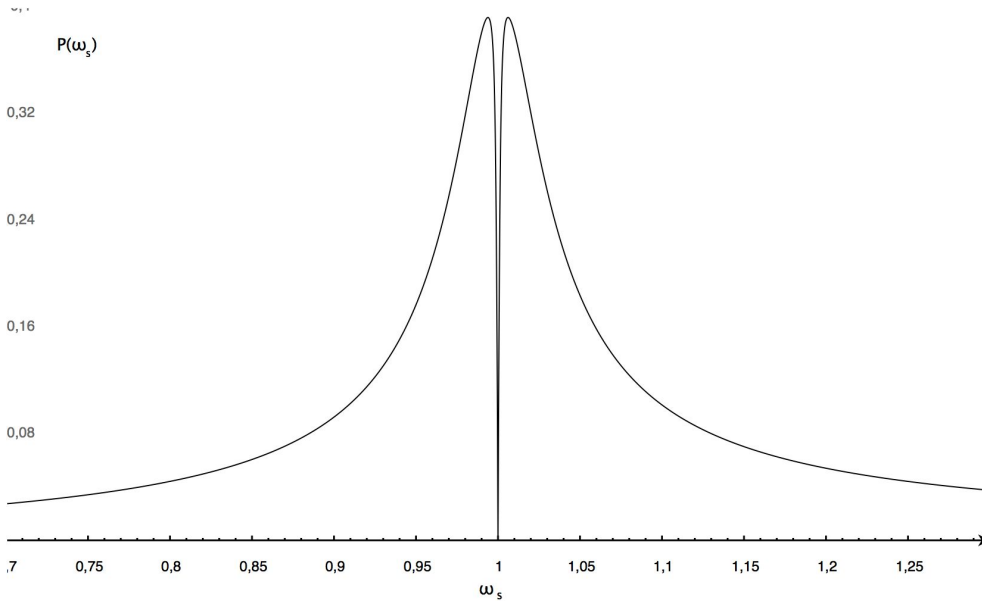


Рис. 5: Мощность, поглощаемая за период, в зависимости от частоты

На рис. 5 отображена эта зависимость. Данный график построен при условии $\gamma_2 \ll \gamma_1$. На графике виден ярко выраженный минимум, соответствующий явлению индуцированной прозрачности: при $\omega = \omega_s$, мощность поглощаемая за период обращается в нуль (при $\gamma_2 \rightarrow 0$). Другими словами, первый осциллятор не откликается на приложенную силу.

Рассмотрим трехуровневую атомную систему, взаимодействующую с двумя источниками фотонов (лазерами). Как известно [5], при взаимодействии атома с

переменным электромагнитным полем (лазером) в случае когда атом находится в резонансе с падающей волной, инверсия населенностей осциллирует по закону

$$W(t) = \cos(\Omega_R t), \quad (33)$$

где $\Omega_R = \frac{\rho_{ba} E}{\hbar}$ - так называемая, частота Раби. Пусть на атомную систему действуют два лазера. Один из них - связывающий - связывает уровни $|a\rangle$ и $|c\rangle$, другой - пробный - связывает уровни $|a\rangle$ и $|b\rangle$. В такой конфигурации, при нулевых отстройках полей ($\omega_{ab} = \nu_{probe}$, $\omega_{ac} = \nu_{couple}$), среда становится фактически прозрачной (поглощение равно нулю) по отношению к пробному полю. Связь уровней $|a\rangle$ и $|c\rangle$ ведет к осцилляции инверсии населенностей, таким образом, что пробный лазер перестает поглощаться атомной системой в целом, что означает прозрачность системы. В этом и заключается явление электромагнитно-индуцированной прозрачности.

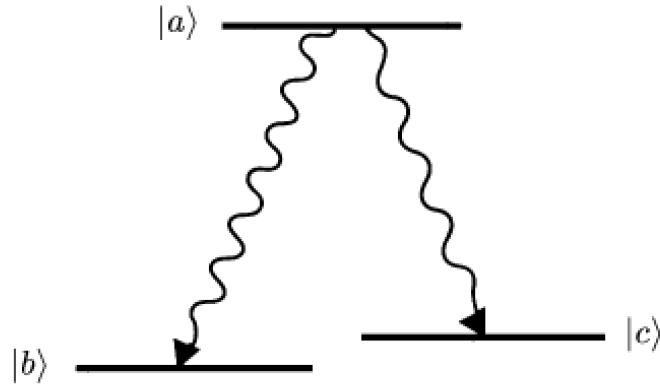


Рис. 6: Трехуровневая атомная структура Λ -типа

4 Заключение

В данной бакалаврской работе был описан резонанс Фано - резонанс с асимметричным профилем, возникающий в результате интерференции волновых процессов. Показана параметрическая запись для резонанса, рассмотрено влияние параметра асимметрии q на профиль резонанса. Было показано, что резонанс типа Фано имеет аналоги в простых классических моделях на примере системы двух связанных осцилляторов. Была разобрана атомная система с непрерывным спектром и одним состоянием из дискретного спектра. Было показано, что в такой системе естественным образом возникает резонанс Фано. Даны феноменологические выражения для параметра асимметрии q . Показано наличие резонанса в двумерном волноводе с потенциальной ямой. Дано выражение коэффициента асимметрии для данной задачи, а также приведены выражения для энергий резонанса и антирезонанса. Было разобрано явление электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЕИТ), как еще одно проявление резонанса Фано.

Список литературы

- [1] Beutler H. Uber absorptionsserien von argon, krypton und xenon zu termen zwischen den beiden ionisierungsgrenzen $2P_3^{2/0}$ und $2P_1^{2/0}$ // Z. Phys. A. - 1935. - Vol. 93 - P. 177-196.
- [2] H. Feshbach. Unified theory of nuclear reactions. Ann. Phys. (N.Y.), 5:357, 1958.
- [3] U. Fano. Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts. Phys. Rev., 124:1866, 1961
- [4] Joe Y. S., Satanin A. M., Kim C. S. Classical analogy of Fano resonances // Phys. Scr. - 2006. - Vol. 74. - P. 259-266
- [5] Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика: Пер. с англ. / Под ред В. В. Самарцева. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 512 с. - ISBN 5-9221-0398-9.