

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра фундаментальных и прикладных проблем физики
микромира

Объединенный институт ядерных исследований
Учебно-научный центр

Попов С.А.

Исследование эффектов, обусловленных
продолжением результатов теории
возмущений КХД во времениподобную
область

Бакалаврская работа

Научный руководитель
к.ф.-м.н. НЕСТЕРЕНКО А.В.

Дубна Июнь 2014

Аннотация

Данная работа посвящена исследованию эффектов, обусловленных продолжением пертурбативных рядов квантовой хромодинамики из пространственноподобной во времениподобную область. В явном виде получено выражение для частичной спектральной функции $\varrho_m^n(\sigma)$, которое позволяет построить соответствующую спектральную функцию $\rho(\sigma)$ в произвольном порядке теории возмущений. Показано, что в лидирующем порядке полученное выражение для $\varrho_m^n(\sigma)$ соответствует результату “наивного” продолжения пертурбативного ряда во времениподобную область.

Содержание

1	Введение	2
2	Дисперсионные соотношения	2
3	Спектральная функция	4
4	R–отношение в рамках теории возмущений	5
5	Частичная спектральная функция	6
6	Заключение	9
7	Дополнения	10
7.1	Пертурбативная бегущая константа связи КХД	10
7.2	Структура сильной поправки	11

1 Введение

Одной из характерных особенностей современной теории сильных взаимодействий, квантовой хромодинамики (КХД), является так называемая асимптотическая свобода [1–3]. Данное свойство теории проявляется в ослаблении интенсивности взаимодействия между цветными объектами при увеличении характерной энергии процесса. В свою очередь, это позволяет применять теорию возмущений для исследования процессов сильного взаимодействия при больших энергиях.

Процессы сильного взаимодействия, которые зависят от пространственноподобной кинематической переменной ($Q^2 = -q^2 > 0$) могут быть непосредственно описаны в рамках теории возмущений. Однако, для адекватного описания адронных процессов, зависящих от времениподобной кинематической переменной ($s = q^2 > 0$) необходимо привлечение дисперсионных соотношений.

2 Дисперсионные соотношения

Теоретическое описание ряда процессов сильного взаимодействия базируется на так называемой адронной функции поляризации вакуума $\Pi(q^2)$, связанной с тензором поляризации вакуума:

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = i \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | 0 \rangle = \frac{i}{12\pi^2} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2). \quad (1)$$

В безмассовом приближении функция поляризации вакуума имеет разрез по всей положительной части действительной оси (см. также [4–6]). Выбрав контур C согласно рис. 1 в области регулярности подинтегрального выражения, воспользуемся формулой Коши с вычитанием:

$$\Delta \Pi(q^2, q_0^2) = \Pi(q^2) - \Pi(q_0^2) = \frac{q^2 - q_0^2}{2\pi i} \oint_C \frac{\Pi(\xi)}{(\xi - q^2)(\xi - q_0^2)} d\xi. \quad (2)$$

Интегралы по окружностям не вносят вклад в данное выражение, а интегрирование по берегам положительной части действительной оси может быть представлено в виде двух слагаемых:

$$\pm \int_{\pm i\varepsilon}^{+\infty \pm i\varepsilon} \frac{\Pi(\xi)}{(\xi - q^2)(\xi - q_0^2)} d\xi = \pm \int_0^{+\infty} \frac{\Pi(\xi \pm i\varepsilon)}{(\xi - q^2)(\xi - q_0^2)} d\xi + O(\varepsilon). \quad (3)$$

\mathcal{R} -отношение электрон-позитронной аннигиляции $R(s)$ в терминах функции поляризации вакуума $\Pi(q^2)$ соответствует ее скачку на действительной оси:

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \Pi(s + i\varepsilon) - \Pi(s - i\varepsilon) \right\}, \quad s = q^2 > 0 \quad (4)$$

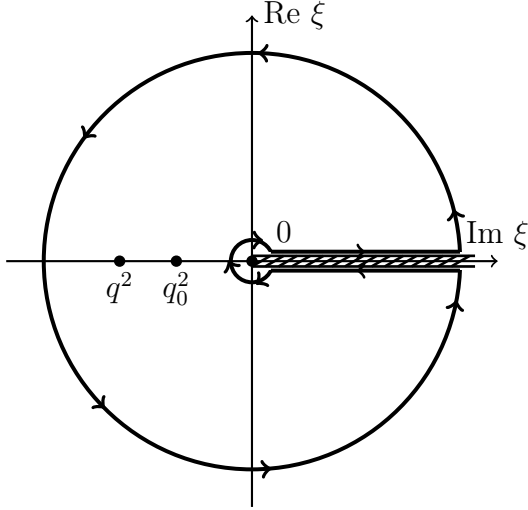


Рис. 1 — Возможный путь интегрирования C в (2): замкнутый окружностью на бесконечности и проходящий по берегам разреза контур лежит в области регулярности подинтегральной функции.

и позволяет записать (2) в более привычном виде [7]:

$$\Delta\Pi(q^2, q_0^2) = \frac{q^2 - q_0^2}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \frac{\Pi(\xi + i\varepsilon) - \Pi(\xi - i\varepsilon)}{(\xi - q^2)(\xi - q_0^2)} d\xi = (q^2 - q_0^2) \int_0^\infty \frac{R(\xi) d\xi}{(\xi - q^2)(\xi - q_0^2)}. \quad (5)$$

Зависимость от точки вычитания q_0^2 исключается введением функции Адлера [8]

$$D(Q^2) = -\frac{d\Pi(-Q^2)}{d\ln(Q^2)}, \quad Q^2 = -q^2 > 0. \quad (6)$$

Дисперсионное соотношение, связывающее функции $D(Q^2)$ и $R(s)$ может быть непосредственно получено из уравнений (5) и (6). В силу того, что

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi(-Q^2)}{d(Q^2)} &= -\int_0^{+\infty} \frac{R(\xi) d\xi}{(\xi + Q^2)(\xi + Q_0^2)} - (Q_0^2 - Q^2) \int_0^{+\infty} \frac{R(\xi) d\xi}{(\xi + Q^2)^2(\xi + Q_0^2)} = \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{(\xi + Q^2) + (Q_0^2 - Q^2)}{(\xi + Q^2)^2(\xi + Q_0^2)} R(\xi) d\xi = -\int_0^{+\infty} \frac{R(\xi)}{(\xi + Q^2)^2} d\xi, \end{aligned} \quad (7)$$

искомое дисперсионное соотношение имеет вид:

$$D(Q^2) = -Q^2 \frac{d\Pi(-Q^2)}{d(Q^2)} = Q^2 \int_0^{+\infty} \frac{R(\xi)}{(\xi + Q^2)^2} d\xi. \quad (8)$$

Обратное дисперсионное отношение может быть получено интегрированием (6) в конечных пределах от $s_1 = -(s + i\varepsilon)$ до $s_2 = -(s - i\varepsilon)$ по лежащему в области регулярности подинтегральной функции контуру [9, 10]

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \Pi(s + i\varepsilon) - \Pi(s - i\varepsilon) \right\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ -\int_{\xi=s_1}^{s_2} d\Pi(-\xi) \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\xi=s_1}^{s_2} D(\xi) \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\xi=s_1}^{s_2} D(-\xi) \frac{-d\xi}{-\xi}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда искомое соотношение имеет вид:

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\varepsilon}^{s-i\varepsilon} D(-\xi) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (10)$$

Определим сильные поправки $d(Q^2)$ и $r(s)$ к функциям $D(Q^2)$ и $R(s)$ соответственно:

$$D(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 [1 + d(Q^2)], \quad R(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 [1 + r(s)]. \quad (11)$$

В силу линейности (8), (10) для сильных поправок $d(Q^2)$ и $r(s)$ также выполняются дисперсионные соотношения

$$d(Q^2) = Q^2 \int_0^{+\infty} \frac{r(\xi)}{(\xi + Q^2)^2} d\xi \quad r(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\varepsilon}^{s-i\varepsilon} d(-\xi) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (12)$$

3 Спектральная функция

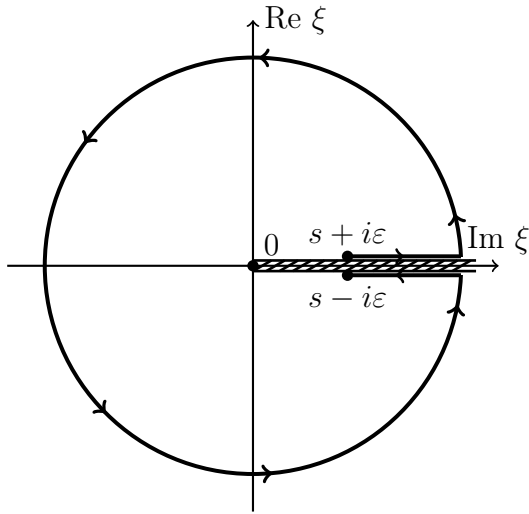


Рис. 2 — Контур интегрирования \bar{C} в (10), который состоит из окружности бесконечно большого радиуса и двух лучей на различных берегах разреза.

Выберем в (12) контур интегрирования \bar{C} согласно рис. 2, тогда интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{\bar{C}} d(-\xi) \frac{d\xi}{\xi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[\int_{s+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} d(-\xi) \frac{d\xi}{\xi} - \int_{s-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon} d(-\xi) \frac{d\xi}{\xi} \right] = \int_s^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} [d(-\sigma - i\varepsilon) - d(-\sigma + i\varepsilon)] \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (13)$$

Удобно ввести спектральную функцию $\rho(\sigma)$ и записать дисперсионное соотношение (12) в виде [11, 12]:

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} [d(-\sigma - i\varepsilon) - d(-\sigma + i\varepsilon)], \quad r(s) = \int_s^{\infty} \rho(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (14)$$

Вывод всех полученных дисперсионных соотношений не требует каких-либо феноменологических или модельных условий и основывается только на довольно общих предположениях:

1. Функция поляризации вакуума $\Pi(q^2)$ имеет разрез по положительной части вещественной оси.
2. Во всех остальных точках комплексной плоскости $\Pi(q^2)$ регулярна.
3. Верны некоторые предположения относительно асимптотического поведения функции поляризации вакуума $\Pi(q^2)$.

Теория возмущений приводит к появлению нефизических особенностей и, строго говоря, дисперсионные соотношения неприменимы для $D_{\text{pert}}^{(\ell)}$ и $R_{\text{pert}}^{(\ell)}$, а связывающие их выражения зависят от выбора контура интегрирования. Несмотря на это, предположим, что выведенные соотношения верны для $\rho_{\text{pert}}^{(\ell)}(\sigma)$, $d_{\text{pert}}^{(\ell)}$, $r_{\text{pert}}^{(\ell)}$ после того как контуры C и \bar{C} будут определенным образом зафиксированы, чтобы избежать неоднозначности.

4 R–отношение в рамках теории возмущений

В рамках теории возмущений асимптотическое поведение функции Адлера $D(Q^2)$ в ультрафиолетовой области ($Q^2 \rightarrow \infty$) в ℓ –петлевом приближении аппроксимируется рядом¹ по степеням бегущей константы связи² $\alpha(Q^2)$:

$$D_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[1 + d_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) \right], \quad d_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left(\frac{4}{\beta_0} \right)^j \left[a_s^{(\ell)}(Q^2) \right]^j. \quad (15)$$

В этом уравнении:

$N_c = 3$ – число цветов,

n_f – число активных ароматов,

Q_f – заряд кварка аромата f в единицах заряда позитрона,

$a_s^{(\ell)}(Q^2) = \alpha_s^{(\ell)}(Q^2) \frac{\beta_0}{4\pi}$ – пертурбативная ℓ –петлевая “функция связи” КХД,

$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$.

Принимая во внимание (11), (14) и (15) в ультрафиолетовой асимптотике ($s \rightarrow \infty$) функция $R(s)$ может быть представлена в следующем виде ($r_j = d_j - \delta_j$):

$$R_{\text{pert}}^{(\ell)}(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[1 + r_{\text{pert}}^{(\ell)}(s) \right], \quad r_{\text{pert}}^{(\ell)}(s) = \sum_{j=1}^{\ell} r_j \left(\frac{4}{\beta_0} \right)^j \left[a_s^{(\ell)}(|s|) \right]^j, \quad (16)$$

¹К настоящему времени вычислены первые четыре коэффициента d_j пертурбативного разложения функции Адлера [13–15].

²Подробнее поведение $a_s^{(\ell)}(Q^2)$ рассматривается в разделе 7.1. Например, в однопетлевом приближении $\ell = 1$, $d_1 = 1$ имеем:

$$a_s^{(1)}(Q^2) = 1 / \ln(Q^2/\Lambda^2), \quad \Lambda - \text{масштабный параметр КХД.}$$

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\beta_0}{4} \right)^2, \quad \delta_4 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\beta_0}{4} \right)^2 \left(3d_2 + \frac{5}{8} \frac{\beta_1}{\beta_0} \right). \quad (17)$$

Таким образом, продолжение результатов теории возмущений во времениподобную область приводит к значительному изменению исходного пертурбативного ряда. Например, в области больших энергий однопетлевая функция связи может быть представлена в виде:

$$a_{TL}^{(1)}(s) \cong a_s^{(1)}(|s|) - \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{\ln^3 w} + O\left(\frac{1}{\ln^5 w}\right), \quad w = \frac{s}{\Lambda^2}, \quad (18)$$

где все слагаемые кроме $a_s^{(1)}(|s|)$ называются π^2 -членами (см. также работы [16–19]). В ранних работах были также описаны другие способы продолжения результатов теории возмущений во времениподобную область (например, [20]). Предлагались различные параметры разложения физических наблюдаемых в ряд во времениподобной области [21]. Например, в работе [22] предлагается раскладывать наблюдаемые $\mathfrak{D}(Q^2)$ во времениподобной области в функциональный ряд по другому параметру разложения:

$$\mathfrak{D}(Q^2) = \sum_{n=N}^{\infty} d_n |\alpha_s(Q^2)|^n \left(\frac{\operatorname{Re} \alpha_s(Q^2)}{|\alpha_s(Q^2)|} \right)^{n(n-2)/3}. \quad (19)$$

5 Частичная спектральная функция

В произвольном порядке теории возмущений в асимптотике $Q^2 \rightarrow \infty$ сильная поправка к функции Адлера $d(Q^2)$ может быть представлена в виде линейной комбинации слагаемых вида (вывод см. дополнение 7.2)

$$a_m^n(Q^2) = \frac{\ln^n(\ln z)}{\ln^m z}, \quad z = \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad 0 \leq n < m, \quad 1 \leq m, \quad (20)$$

а следовательно, спектральная плотность $\rho(\sigma)$ (14) представима как линейная комбинация “частичных спектральных функций”

$$\varrho_m^n(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[a_m^n(-\sigma - i\varepsilon) - a_m^n(-\sigma + i\varepsilon) \right], \quad \sigma > 0. \quad (21)$$

Для нахождения явного вида $\varrho_m^n(\sigma)$ найдем значения a_m^n на берегах разреза. Согласно соотношению (для верхнего берега нужно выбирать верхний знак, для нижнего - соответственно нижний):

$$\ln(a \pm ib) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) \pm i\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \right], \quad (22)$$

для удобства обозначив $y = \ln(\sigma/\Lambda^2)$, $\sigma > 0$, получаем:

$$\ln(-\sigma \pm i\varepsilon) = y \pm i\pi, \quad \ln(\ln(-\sigma \pm i\varepsilon)) = \ln(y \pm i\pi) = A \pm i\pi B, \quad (23)$$

$$A = \frac{1}{2} \ln(y^2 + \pi^2), \quad \frac{B}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{\pi}\right) \quad (24)$$

Отсюда видно, что a_m^n является рациональной функцией y :

$$a_m^n(z) = \frac{\ln^n(\ln z)}{\ln^m z} = \frac{(A \pm iB)^n}{(y \pm i\pi)^m} = \frac{(A \pm iB)^n (y \mp i\pi)^m}{(y^2 + \pi^2)^m}. \quad (25)$$

Числитель преобразуем используя бином Ньютона:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \implies (a + b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}, \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad (26)$$

а именно:

$$(A \pm iB)^n (y \mp i\pi)^m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\pm 1)^k i^k B^k A^{n-k} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\mp 1)^l i^l \pi^l y^{m-l} \quad (27)$$

Так как $\varrho_m^n(\sigma)$ пропорциональна разности значений на берегах разреза, то в ответ не войдут симметричные (не зависящие от выбора берега разреза) слагаемые из (27).

Сначала представим каждую из сумм в виде симметричной и антисимметричной подсуммы, что в нашем конкретном случае соответствует разделению элементов по четности индекса

$$\sum_{l=0}^m \binom{m}{l} (\mp 1)^l i^l \pi^l y^{m-l} = \sum_{\substack{l=0 \\ l \bmod 2 = 0}}^m \binom{m}{l} (\mp 1)^l i^l \pi^l y^{m-l} + \sum_{\substack{l=0 \\ l \bmod 2 = 1}}^m \binom{m}{l} (\mp 1)^l i^l \pi^l y^{m-l}. \quad (28)$$

Если $[x]$ — целая часть x , то максимальный четный индекс суммы равен $2K_j$, а нечетный равен $2\bar{K}_j + 1$, где:

$$K_j = \left[\frac{j}{2} \right] = \frac{j - j \bmod 2}{2}, \quad \bar{K}_j = \left[\frac{j-1}{2} \right] = \frac{(j-1) - (j-1) \bmod 2}{2}, \quad (29)$$

и, изменив индекс суммирования, можно упростить каждую из подсумм:

$$\sum_{\substack{l=0 \\ l \bmod 2 = 0}}^m \binom{m}{l} (\mp 1)^l i^l \pi^l y^{m-l} = \sum_{l=0}^{K_m} \binom{m}{2l} (-1)^l \pi^{2l} y^{m-2l}, \quad (30)$$

$$\sum_{\substack{l=0 \\ l \bmod 2 = 1}}^m \binom{m}{l} (\mp 1)^l i^l \pi^l y^{m-l} = \mp i \sum_{l=0}^{\bar{K}_m} \binom{m}{2l+1} (-1)^l \pi^{2l+1} y^{m-2l-1}. \quad (31)$$

Аналогично для второй суммы:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \bmod 2 = 0}}^n \binom{n}{k} (\pm 1)^k i^k B^k A^{n-k} = \sum_{k=0}^{K_n} \binom{n}{2k} (-1)^k B^{2k} A^{n-2k}, \quad (32)$$

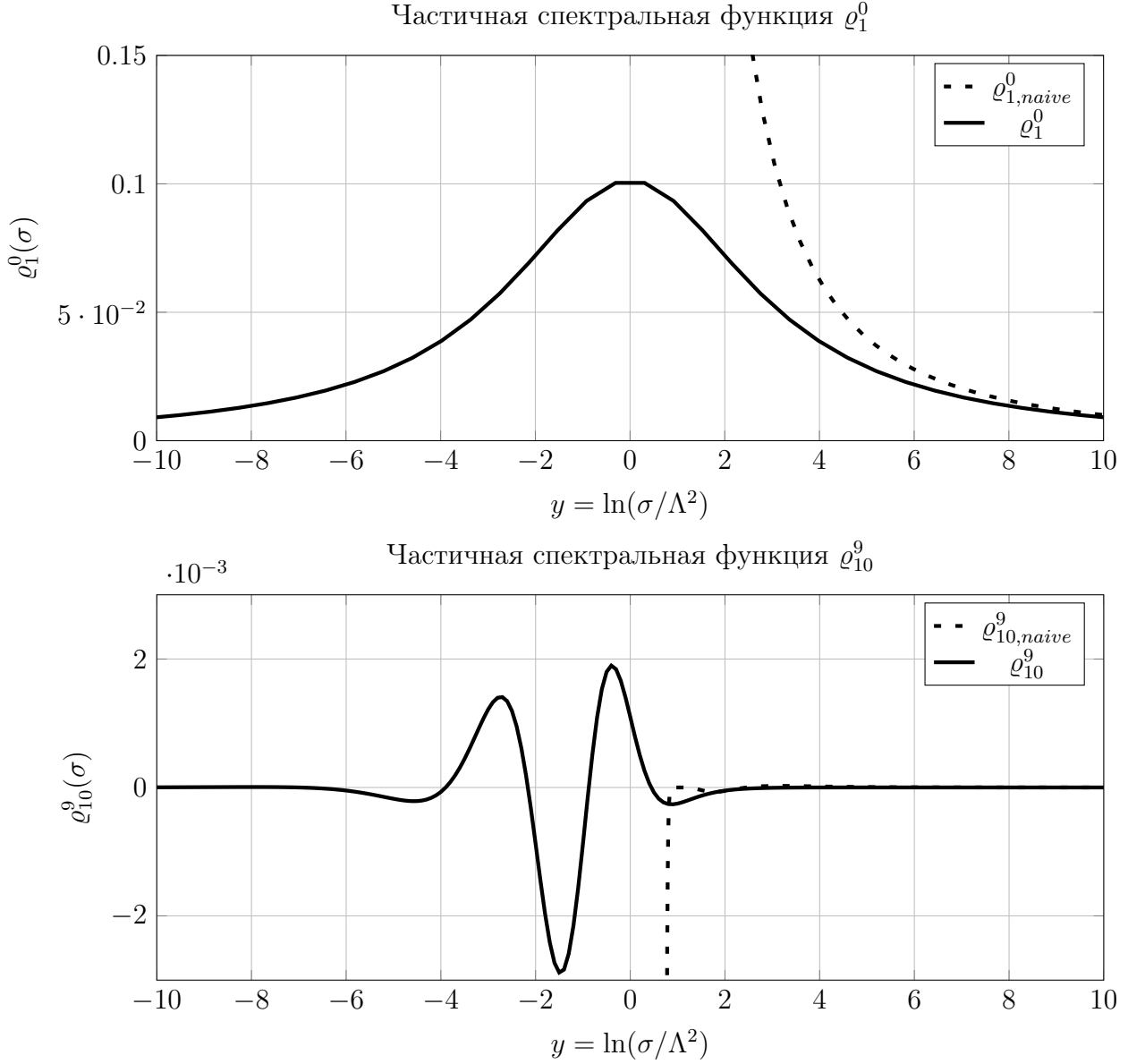


Рис. 3 — На каждом графике представлены частичная спектральная функция и соответствующее «наивное приближение».

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \bmod 2=1}}^n \binom{n}{k} (\pm 1)^k i^k B^k A^{n-k} = \pm i \sum_{k=0}^{\tilde{K}_n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k B^{2k+1} A^{n-2k-1}. \quad (33)$$

Выражения (29) имеют место только при $n > 0$, случай $n = 0$ требует дополнительного анализа. Если $n = 0$, то одна из сумм тождественно равна единице, а в окончательное выражение будет давать вклад только антисимметричная часть второй суммы:

$$\frac{\mp i}{(y^2 + \pi^2)^{-m}} \sum_{l=0}^{\tilde{K}_m} \binom{m}{2l+1} (-1)^l \pi^{2l+1} y^{m-2l-1}. \quad (34)$$

В общем случае остаются обе суммы и давать вклад в окончательное выражение будут только элементы с нечетным $k + l$, следовательно k и l имеют различную четность. Это позволяет использовать полученные разложения сумм, чтобы переписать антисимметричную часть $(y^2 + \pi^2)^m a_m^n(-\sigma \pm i\varepsilon)$ как:

$$\begin{aligned} & \mp i \sum_{k=0}^{K_n} \sum_{l=0}^{\tilde{K}_m} \binom{n}{2k} \binom{m}{2l+1} (-1)^{k+l} B^{2k} A^{n-2k} \pi^{2l+1} y^{m-2l-1} \pm \\ & \pm i \sum_{k=0}^{\tilde{K}_n} \sum_{l=0}^{K_m} \binom{n}{2k+1} \binom{m}{2l} (-1)^{k+l} B^{2k+1} A^{n-2k-1} \pi^{2l} y^{m-2l}. \end{aligned} \quad (35)$$

В итоге явное выражение для функции $\varrho_m^n(\sigma)$ (21) для произвольных значений вышеупомянутых индексов n и m имеет следующий вид [23]:

$$\begin{aligned} \varrho_m^n(\sigma) &= \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^m} \left[\sum_{k=0}^{K_n} \sum_{l=0}^{\tilde{K}_m} \binom{n}{2k} \binom{m}{2l+1} (-1)^{k+l} B^{2k} A^{n-2k} \pi^{2l} y^{m-2l-1} \right. \\ & \left. - \sum_{k=0}^{\tilde{K}_n} \sum_{l=0}^{K_m} \binom{n}{2k+1} \binom{m}{2l} (-1)^{k+l} B^{2k+1} A^{n-2k-1} \pi^{2l-1} y^{m-2l} \right], \quad (n \geq 1). \\ \varrho_m^0(\sigma) &= \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^m} \left[\sum_{j=0}^{K_m} \binom{m}{2j+1} y^{m-2j-1} (-1)^j \pi^{2j} \right] \quad (n = 0), \end{aligned} \quad (36)$$

и в асимптотической ультрафиолетовой области ведет себя как

$$\varrho_m^n(\sigma) \simeq \frac{\ln^{n-1} y}{y^{m+1}} (m \ln y - n), \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad (37)$$

что соответствует результату “наивного” продолжения пертурбативного ряда во времениподобную область $r_{\text{naive}}(s) = d_{\text{pert}}(|s|)$. В качестве примера на рис.3 представлены графики частичных спектральных функции $\varrho_1^0(\sigma)$ и $\varrho_9^{10}(\sigma)$.

6 Заключение

В явном виде получено выражение для частичной спектральной функции $\varrho_m^n(\sigma)$ (36), которое может быть использовано при построении соответствующей спектральной функции $\rho(\sigma)$ (14) в произвольном порядке теории возмущений. Показано, что в ультрафиолетовой асимптотике $\sigma \rightarrow \infty$ в лидирующем порядке полученное выражение для $\varrho_m^n(\sigma)$ соответствует результату “наивного” продолжения пертурбативного ряда во времениподобную область. Полученные результаты могут служить основой для дальнейшего исследования эффектов, обусловленных продолжением результатов теории возмущений КХД во времениподобную область, в частности, для вычисления “ π^2 -вкладов” в высших порядках теории возмущений.

Автор выражает благодарность к.ф.-м.н. А.В. Нестеренко (ЛТФ ОИЯИ) за постановку задачи и научное руководство.

7 Дополнения

7.1 Пертурбативная бегущая константа связи КХД

Зависимость константы связи g от нормировочного параметра появляется в результате процедуры перенормировки и обычно описывается с помощью β -функции и уравнения ренормализационной группы. В рамках теории возмущений β -функция представляет собой степенной ряд, тогда уравнение ренормгруппы принимает вид:

$$\frac{d \ln \{g^2(\mu^2)\}}{d \ln \mu^2} = \beta(g(\mu^2)) \approx -\beta_0 \left[\frac{g^2(\mu^2)}{16\pi^2} \right] - \beta_1 \left[\frac{g^2(\mu^2)}{16\pi^2} \right]^2 - \beta_2 \left[\frac{g^2(\mu^2)}{16\pi^2} \right]^3 - \dots \quad (38)$$

Вводя бегущую константу связи $\alpha(\mu^2)$ и функцию связи $a(\mu^2)$ КХД

$$\alpha(\mu^2) = \frac{g^2(\mu^2)}{4\pi}, \quad a(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu^2)\beta_0}{4\pi} \quad (39)$$

перепишем его в ℓ -петлевом приближении. Для этого не будем контролировать слагаемые степенных рядов более высокой чем ℓ степени:

$$\frac{d \ln \{a_s^{(\ell)}(\mu^2)\}}{d \ln \mu^2} = - \sum_{j=0}^{\ell-1} B_j [a_s^{(\ell)}(\mu^2)]^{j+1}, \quad B_j = \frac{\beta_j}{\beta_0^{j+1}}. \quad (40)$$

К примеру, в однопетлевом приближении уравнение ренормгруппы допускает разделение переменных:

$$\frac{d \ln \{a_s^{(1)}\}}{d \ln \mu^2} = -a_s^{(1)} \Rightarrow -\frac{d\{a_s^{(1)}\}}{\{a_s^{(1)}\}^2} = d \ln \mu^2 \Rightarrow \frac{1}{a_s^{(1)}(Q^2)} - \frac{1}{a_s^{(1)}(Q_0^2)} = \ln \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right), \quad (41)$$

а введение масштабного параметра КХД Λ позволяет заключить в него всю зависимость от точки нормировки Q_0 :

$$a_s^{(1)}(Q^2) = \frac{1}{\ln z}, \quad z = \frac{Q^2}{\Lambda^2}. \quad (42)$$

В двух, трех и четырехпетлевом приближении выражения для бегущей константы связи (полученные в результате итеративного решения) соответственно равны:

$$\alpha^{(2)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{\ln z} - B_1 \frac{\ln(\ln z)}{\ln^2 z} \right], \quad (43)$$

$$\alpha^{(3)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{\ln z} - B_1 \frac{\ln(\ln z)}{\ln^2 z} + \frac{B_1^2 (\ln^2(\ln z) - \ln(\ln z) - 1) + B_2}{\ln^3 z} \right], \quad (44)$$

$$\alpha^{(4)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{\ln z} - B_1 \frac{\ln(\ln z)}{\ln^2 z} + \frac{B_1^2 (\ln^2(\ln z) - \ln(\ln z) - 1) + B_2}{\ln^3 z} + \frac{1}{\ln^4 z} \left\{ B_1^3 \left(-\ln^3(\ln z) + \frac{5}{2} \ln^2(\ln z) + 2 \ln(\ln z) - \frac{1}{2} \right) - 3B_1 B_2 \ln(\ln z) + \frac{B_3}{2} \right\} \right]. \quad (45)$$

Важно отметить, что отличие приближенного решения от точного состоит в слагаемых, не контролируемых в рамках данного ℓ -петлевого приближения.

7.2 Структура сильной поправки

Определение (Пространство Ω_k асимптотических $\frac{1}{\ln^k z}$ -функции). Функция $f(z)$ принадлежит пространству Ω_k тогда и только тогда, когда $f(z)$ можно представить в виде конечной линейной комбинации слагаемых вида

$$a_m^n = \frac{\ln^n \ln z}{\ln^m z}, \quad 0 \leq n < m \leq k.$$

Теорема 1 (Основные свойства Ω_k). Верны следующие свойства функции из Ω_k :

1. Ω_k - линейное функциональное пространство.
2. Пространство с большим индексом содержит пространство с меньшим индексом ($k' > k$): $\Omega_{k'} \supset \Omega_k$
3. Произведение функции $f(z) \in \Omega_k$, $g(z) \in \Omega_{k'}$ лежит в пространстве $\Omega_{k'+k}$.

Доказательство. Линейность и вложенность непосредственно следуют из определения.

Определение (функция $f(z)$ заданная формальным рядом по a_m^n). Если задано отображение $c_{n,m} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, то формальную запись:

$$f(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m} \frac{\ln^n \ln z}{\ln^m z}$$

будем называть заданным формальным рядом, то есть $\frac{\ln^n \ln z}{\ln^m z}$ нужно мыслить как базисные вектора некоторого бесконечномерного пространства. Если ряд сходится, например, если количество ненулевых слагаемых конечно, то вместе с формальной суммой корректно определена задаваемая этой суммой функция. В случаях, когда это не вызывает неоднозначности, мы не будем вводить для этой функции отдельное обозначение.

Определение (Выделение контролируемой в рамках ℓ -петлевого приближения части $f_{(\ell)}(z)$ функции $f(x)$). Если функция $f(z)$ представима в виде формального ряда:

$$f(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{n,m} \frac{\ln^n \ln z}{\ln^m z},$$

то ℓ -приближением будем называть функцию

$$f_{(\ell)}(z) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,m} \frac{\ln^n \ln z}{\ln^m z}$$

Теорема 2. Верны следующие свойства функции относительно введенной операции, когда все используемые операции определены:

1. Для любых формальных функций $(g(z)f(z))_{(\ell)} = (g_{(\ell)}(z)f_{(\ell)}(z))_{(\ell)}$.
2. Для любой функции, заданной степенным рядом, и функции $f(z)$, не содержащей слагаемых с $n = 0$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \longrightarrow \quad (F(g(z)))_{(\ell)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n ((g_{(\ell)}(z))^n)_{(\ell)}.$$

Определение (Порядок убывания функции $f(z)$). - степень знаменателя первого ненулевого слагаемого:

$$\text{ord}\{f(z)\} = \min_{\substack{n, m \\ c_{n,m} \neq 0}} n$$

Лемма 1 (Свойства $\text{ord}\{f(z)\}$). Непосредственно из определения следуют:

1. Логарифмическое свойство

$$\text{ord}\{f(z)g(z)\} = \text{ord}\{f(z)\} + \text{ord}\{g(z)\}$$

2. Порядок основных функции

$$\text{ord}\{a_m^n\} = m$$

3. Связь с операцией выделения части функции, контролируемой в рамках ℓ -петлевого приближения:

$$f(z) = g(z)u(z), \quad \text{ord}\{g(z)\} = m \quad \longrightarrow \quad f_{(\ell+m)}(z) = (g_{(\ell+m)}(z)u_{(\ell)}(z))_{(\ell+m)}$$

Свойство 3 из предложенной леммы является ключевым для доказательства корректности итеративного метода нахождения $\alpha^{(\ell)}(Q^2)$.

Лемма 2 (Интегральные свойства).

1. Рекуррентные соотношения $\forall n \geq 0 \quad \forall m \geq 2$

$$\frac{\ln^n \xi}{\xi^m} d\xi = \frac{n}{m-1} \frac{\ln^{n-1} \xi}{\xi^m} d\xi - \frac{1}{m-1} \frac{\ln^n \xi}{\xi^{m-1}}$$

Доказательство. Проинтегрируем исходное выражение по частям.

$$\frac{\ln^n \xi}{\xi^m} d\xi = \xi \frac{\ln^n \xi}{\xi^m} - \xi \frac{n \xi^m \ln^{n-1} \xi \frac{1}{\xi} - m \xi^{m-1} \ln^n \xi}{\xi^{2m}} d\xi = \xi \frac{\ln^n \xi}{\xi^m} - \frac{n \ln^{n-1} \xi - m \ln^n \xi}{\xi^m} d\xi,$$

откуда сразу получаем требуемое свойство.

2. Для $m = 1$:

$$\frac{\ln^n \xi}{\xi^1} d\xi = \frac{1}{n+1} d \ln^{n+1} \xi$$

3. Интегрирование основных функции при $0 \leq n < m$, $m > 1$:

$$\frac{\ln^n \xi}{\xi^m} \in \Omega_m, \quad \xi = \ln z \longrightarrow \int \frac{\ln^n \xi}{\xi^m} d\xi = -\xi \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!} \frac{1}{(m-1)^{j+1}} \frac{\ln^{n-j} \xi}{\xi^{m-j}} + C$$

Особый случай $n = 0$, $m = 1$:

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = \ln \xi + C, \quad \xi = \ln z$$

Доказательство. Следует непосредственно из рекуррентных соотношений.

4. Связь с порядком убывания функции

$$\text{ord} \left\{ \int \frac{\ln^n \xi}{\xi^m} d\xi \right\} = m - n - 1$$

Теорема 3 (Итеративный метод нахождения $\alpha^{(\ell)}(Q^2)$). Пусть в $(\ell - 1)$ -петлевом приближении известно выражение для константы связи $\alpha_{(\ell-1)}(Q^2)$, то есть известны все слагаемые, контролируемой в рамках ℓ -петлевого приближения, а также $\alpha_{(\ell-1)}(Q^2) \in \Omega_{\ell-1}$. Покажем, что итеративный метод решения уравнения ренормгруппы позволяет определить $\alpha_{(\ell)}(Q^2) \in \Omega_{\ell}$.

Доказательство. Запишем уравнение, которое будем итерировать, отбрасывая слагаемые не контролируемые в рамках ℓ -петлевого выражения:

$$-\frac{d \ln a^{(\ell)}(\mu^2)}{\{a^{(\ell)}(\mu^2)\}^2} = \left[1 + \sum_{j=1}^{\ell-1} B_j [a^{(\ell)}(\mu^2)]^j \right] d \ln \mu^2$$

$$\frac{1}{a^{(\ell)}(\mu^2)} = \ln z + \int \sum_{j=1}^{\ell-1} B_j [a^{(\ell)}(z)]^j d \ln z$$

Тогда вводя $z = \frac{\mu^2}{\Lambda^2}$ получаем:

$$\frac{1}{a^{(\ell)}(z)} = \ln z + \int_0^z \sum_{j=1}^{\ell-1} B_j [a^{(\ell)}(\xi)]^j d \ln \xi$$

$$a^{(\ell)}(z) = \frac{1}{\ln z + \int_0^z \sum_{j=1}^{\ell-1} B_j [a^{(\ell)}(\xi)]^j d \ln \xi} = \frac{1}{\ln z} \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln z} \int_0^z \sum_{j=1}^{\ell-1} B_j [a^{(\ell)}(\xi)]^j d \ln \xi}$$

Ограничим число контролируемых членов в знаменателе дроби на 1. Это не приведет к уменьшению числа контролируемых членов в левой части, так как $\text{ord} \left\{ \frac{1}{\ln z} \right\} = 1$:

$$a^{(\ell)}(z) = \frac{1}{\ln z} \frac{1}{1 + \frac{1}{\ln z} \int_0^z \sum_{j=1}^{\ell-1} B_j [a^{(\ell-1)}(\xi)]^j d \ln \xi}.$$

Нам достаточно показать, что дробь $\in \Omega_{\ell-1}$. Заметим, что $\text{ord}\left\{\sum_{j=1}^{l-1} B_j[a^{(\ell-1)}(\xi)]^j d \ln \xi\right\} \geq m - n - 1 \geq 0$, а значит

$$\text{ord}\left\{\frac{1}{\ln z} \sum_{j=1}^{l-1} B_j[a^{(\ell-1)}(\xi)]^j d \ln \xi\right\} \geq m - n - 1 + 1 \geq 1$$

Также из доказанных лемм следует:

$$\frac{1}{\ln z} \sum_{j=1}^{l-1} B_j[a^{(\ell-1)}(\xi)]^j d \ln \xi \in \Omega_{\ell-1},$$

также раскладываем дробь в ряд Тейлора, получаем:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\ln z} \int_0^z \sum_{j=1}^{l-1} B_j[a^{(\ell-1)}(\xi)]^j d \ln \xi} \in \Omega_{\ell-1}.$$

Таким образом итеративный метод корректен.

Список литературы

- [1] G. 't Hooft, 1972 (unpublished).
- [2] D. J. Gross and F. Wilczek, "Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories," Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [3] H. D. Politzer, "Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?," Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [4] A. V. Nesterenko and J. Papavassiliou, "The Massive analytic invariant charge in QCD," Phys. Rev. D **71**, 016009 (2005) [hep-ph/0410406].
- [5] A. V. Nesterenko and J. Papavassiliou, "A Novel integral representation for the Adler function," J. Phys. G **32**, 1025 (2006) [hep-ph/0511215].
- [6] A. V. Nesterenko, "Adler function in the analytic approach to QCD," eConf C **0706044**, 25 (2007) [arXiv:0710.5878 [hep-ph]].
- [7] F. J. Gilman, "Theory of electron-Positron Annihilation Into Hadrons," SLAC-PUB-1650.
- [8] S. L. Adler, "Some Simple Vacuum Polarization Phenomenology: $e^+e^- \rightarrow$ Hadrons: The Muonic-atom x-Ray Discrepancy and $g_\mu - 2$ of the Muon," Phys. Rev. D **10**, 3714 (1974).
- [9] A. V. Radyushkin, "Optimized Λ - Parametrization for the QCD Running Coupling Constant in Space - Like and Time - Like Regions," JINR Rapid Commun. **78**, 96 (1996) [hep-ph/9907228].
- [10] N. V. Krasnikov and A. A. Pivovarov, "The Influence Of The Analytical Continuation Effects On The Value Of The QCD Scale Parameter Lambda Extracted From The Data On Charmonium And Upsilon Hadron Decays," Phys. Lett. B **116**, 168 (1982).
- [11] K. A. Milton and I. L. Solovtsov, "Analytic perturbation theory in QCD and Schwinger's connection between the beta function and the spectral density," Phys. Rev. D **55**, 5295 (1997) [hep-ph/9611438].
- [12] K. A. Milton and I. L. Solovtsov, "Can the QCD effective charge be symmetrical in the Euclidean and the Minkowskian regions?," Phys. Rev. D **59**, 107701 (1999) [hep-th/9812171].
- [13] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin and J. H. Kuhn, "Order $\alpha^4(s)$ QCD Corrections to Z and tau Decays," Phys. Rev. Lett. **101**, 012002 (2008) [arXiv:0801.1821 [hep-ph]].
- [14] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin and J. H. Kuhn, "Adler Function, Bjorken Sum Rule, and the Crewther Relation to Order α_s^4 in a General Gauge Theory," Phys. Rev. Lett. **104**, 132004 (2010) [arXiv:1001.3606 [hep-ph]].
- [15] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn and J. Rittinger, "Adler Function, Sum Rules and Crewther Relation of Order $O(\alpha_s^4)$: the Singlet Case," Phys. Lett. B **714**, 62 (2012) [arXiv:1206.1288 [hep-ph]].

- [16] A. L. Kataev and V. V. Starshenko, “Estimates of the higher order QCD corrections to $R(s)$, $R(\tau)$ and deep inelastic scattering sum rules,” *Mod. Phys. Lett. A* **10**, 235 (1995) [hep-ph/9502348].
- [17] J. D. Bjorken, “Two Topics In Quantum Chromodynamics,” SLAC-PUB-5103.
- [18] A. L. Kataev and V. V. Starshenko, “Estimates of the higher order QCD corrections: Theory and applications,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **39BC**, 312 (1995) [hep-ph/9408395].
- [19] G. M. Prosperini, M. Raciti and C. Simolo, “On the running coupling constant in QCD,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **58**, 387 (2007) [hep-ph/0607209].
- [20] R. G. Moorhouse, M. R. Pennington and G. G. Ross, “What Can Asymptotic Freedom Say About $e^+e^- \rightarrow$ Hadrons?,” *Nucl. Phys. B* **124**, 285 (1977).
- [21] M. R. Pennington and G. G. Ross, “Perturbative QCD for Timelike Processes: What Is the Best Expansion Parameter?,” *Phys. Lett. B* **102**, 167 (1981).
- [22] M. R. Pennington, R. G. Roberts and G. G. Ross, “How to Continue the Predictions of Perturbative QCD From the Space - Like Region Where They Are Derived to the Time - Like Regime Where Experiments Are Performed,” *Nucl. Phys. B* **242**, 69 (1984).
- [23] С.А. Попов, “Исследование эффектов, обусловленных продолжением результатов теории возмущений КХД во времениподобную область,” Труды XVIII международной научной конференции Объединения молодых ученых и специалистов ОИЯИ (ОМУС-2014), 24-28 февраля, Дубна (в печати).
- [24] А.В.Нестеренко, “Теоретическое описание функции Адлера и электрон-позитронной аннигиляции в адроны,” Дубна: Издательский отдел ОИЯИ, УИЦ-2011-49, 144 с., 2011.
- [25] T. Appelquist and H. Georgi, “ e^+e^- annihilation in gauge theories of strong interactions,” *Phys. Rev. D* **8**, 4000 (1973).
- [26] A. Zee, “Electron positron annihilation in stagnant field theories,” *Phys. Rev. D* **8**, 4038 (1973).
- [27] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev and F. V. Tkachov, “Higher Order Corrections to σ -t ($e^+e^- \rightarrow$ Hadrons) in Quantum Chromodynamics,” *Phys. Lett. B* **85**, 277 (1979).
- [28] M. Dine and J. R. Sapiirstein, “Higher Order QCD Corrections in e^+e^- Annihilation,” *Phys. Rev. Lett.* **43**, 668 (1979).
- [29] W. Celmaster and R. J. Gonsalves, “An Analytic Calculation of Higher Order Quantum Chromodynamic Corrections in e^+e^- Annihilation,” *Phys. Rev. Lett.* **44**, 560 (1980).
- [30] L. R. Surguladze and M. A. Samuel, “Total hadronic cross-section in e^+e^- annihilation at the four loop level of perturbative QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **66**, 560 (1991) [Erratum-ibid. **66**, 2416 (1991)].