Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Факультет общей и прикладной физики
Кафедра фундаментальных и прикладных проблем физики микромира

Объединенный институт ядерных исследований
Учебно-научный центр

Степан Сидоров

Новые суперсимметричные расширения моделей Ландау.

Магистерская диссертация

Научный руководитель
д. ф.-м. н., проф. Е.А. Иванов

Рецензент
к. ф.-м. н., ст. н.с. С.А. Федорук

Дубна, Июнь 2011.

Содержание

1 Введение

Модель Ландау описывает заряженную частицу, движущуюся на плоскости под воздействием однородного магнитного поля, ортогонального к плоскости. Сферический вариант модели Ландау (модель Хэлдейна) описывает заряженную частицу на сфере $S^2 \backsim SU(2)/U(1)$ в поле монополя Дирака, помещенного в центр. Эти модели имеют много приложений, в частности, в квантовом эффекте Холла(КЭХ).

Суперсимметричные расширения модели Ландау, о которых пойдет речь в настоящей работе, представляют собой модели нерелятивистских суперчастиц, движущихся на супермногообразиях. Изучение таких моделей может прояснить вопрос о возможных проявлениях суперсимметрии в различных версиях КЭХ (включая так называемый спиновый КЭХ) и других моделях физики конденсированных сред. Эти модели можно интерпретировать как $d = 1$ нелинейные σ-модели с членом Весса-Зумино-Новикова-Виттена.

Ранее, суперсимметричные модели Ландау были построены на фактор-пространствах группы $SU(2|1)$ в работах [1], [2]. Также модель Ландау была построена на нечётных косетах $SU(1|n)/U(n)$ [2].

В этой работе проведено исследование суперсимметричной модели Ландау на многообразиях типа $SU(m+1|n)/SU(m|n) \times U(1)$. Это супермногообразие является суперсимметричным обобщением $SU(n)/SU(n-1) \times U(1)$.

Также, в этой работе будут рассмотрены фактор-пространства группы $SU(2|2)$. В частности, будет построена суперсимметричная модель Ландау на многобразии

$$SU(2|2)/[SU(2) \times U(1) \times U(1)], \tag{1.1}$$

которое является суперсимметричным аналогом многобразия

$$SU(4)/[SU(2) \times U(1) \times U(1)]. \tag{1.2}$$

2 Суперсферические модели Ландау

Для начала построим суперсферическую модель Ландау на фактор-пространстве $SU(m+1|n)/SU(m|n)\times U(1)$. Для этого нам понадобится определить алгебру $SU(m+1|n)$. Потом найти вариации полей и записать Лагранжиан как для нелинейной $d=1$ σ-модели.

2.1 Алгебра группы SU(m+1|n)

Алгебра группы Ли SU(m+1|n) состоит из $2(m+1)n$ фермионных генераторов и $(m+1)^2+n^2-1$ бозонных. Антикоммутаторы фермионных генераторов имеют вид:

$$\{Q^{\alpha i},\bar{Q}_{\beta j}\}=\left(\delta^i_j\tilde{T}^\alpha_\beta-\delta^\alpha_\beta T^i_j\right)+\delta^\alpha_\beta\delta^i_j Z\,,\quad \{Q^{\alpha i},Q^{\beta j}\}=\{\bar{Q}_{\alpha i},\bar{Q}_{\beta j}\}=0\,,\tag{2.3}$$

где

$$(T^i_k)^\dagger=T^k_i\,,\ T^k_k=0\,,\quad [T^i_k,T^j_l]=\delta^j_k T^i_l-\delta^i_l T^j_k\,,\quad [T^i_k,Q^{\alpha l}]=\delta^l_k Q^{\alpha i}-\frac{1}{2}\delta^i_k Q^{\alpha l}\,,\tag{2.4}$$

и $\tilde{T}^\alpha_\beta$ имеют такой же вид. Латинские индексы проходят значения от 1 до n, а греческие от 0 до m. Бозонные генераторы образуют три подгруппы SU(m+1), SU(n) и U(1). Генераторы этих подгупп SU(m+1), SU(n), U(1) обозначаются как $\tilde{T}^\alpha_\beta$, T^j_i, Z , соответственно. Надо учесть тот факт, что Z является центральным зарядом (коммутирует со всеми остальными) и что подалгебры $\tilde{T}^\alpha_\beta$, T^j_i коммутируют друг с другом.

Рассмотрим теперь генераторы группы $SU(2|2)$. Переопределим $SU(2)$ генераторы как:

$$\begin{aligned}&T^1_1=-T^2_2=\mathcal{J}_3\,,\ T^1_2=\mathcal{J}_+\,,\ T^2_1=\mathcal{J}_-,\,,\quad \tilde{T}^1_1=-\tilde{T}^2_2=J_3\,,\ \tilde{T}^1_2=J_+\,,\ \tilde{T}^2_1=J_-,\,,\\&[J_+,J_-]=2J_3\,,\ [J_3,J_\pm]=\pm J_\pm\,,\ [\mathcal{J}_+,\mathcal{J}_-]=2\mathcal{J}_3\,,\ [\mathcal{J}_3,\mathcal{J}_\pm]=\pm\mathcal{J}_\pm\,.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Определим также нечётные операторы

$$Q^{1i}=Q^i,\ Q^{2i}=S^i\,,\quad \bar{Q}_{1i}=\bar{Q}_i,\ \bar{Q}_{2i}=\bar{S}_i\,.\tag{2.6}$$

2.2 Преобразования суперсимметрии

Преобразования $SU(m+1|n)$ сохраняют инвариантной следующую билинейную форму:

$$u^\alpha\bar{u}_\alpha+\bar{\zeta}_i\zeta^i=1,\tag{2.7}$$

где u^α - комплексные бозонные поля, ζ^i - комплексные фермионные поля. Таким образом, суперсимметричные преобразования имеют вид:

$$\delta u^\alpha=-\bar{\epsilon}^\alpha_i\zeta^i\,,\tag{2.8}$$
$$\delta\zeta^i=\epsilon^i_\alpha u^\alpha\,.\tag{2.9}$$

Сделаем замену $\xi^i = \zeta^i / u^0$, $z^a = u^a / u^0$, где $a = 1 \ldots m$. После замены преобразования приобретут следующий вид:

$$\delta z^a = -\left(\bar{\epsilon}_i^a - z^a \bar{\epsilon}_i^0\right) \xi^i \,, \tag{2.10}$$
$$\delta \xi^i = \epsilon_0^i + \epsilon_a^i z^a + (\bar{\epsilon}^0 \xi) \xi^i \,. \tag{2.11}$$

Здесь рассмотрены только нечётные преобразования из $SU(m+1|n)$, но помимо них есть также преобразования подгрупп $U(1)$, $SU(m+1)$, $SU(n)$. Запишем также косетные преобразования для фактор-пространства $SU(2|2)/[SU(1|2) \times U(1)$:

$$\begin{aligned} \delta u &= a + \bar{a} u^2 - \left(\xi \cdot \bar{\theta}\right) + u \left(\xi \cdot \bar{\varepsilon}\right) \,, \\ \delta \xi^i &= \varepsilon^i + u \theta^i + \bar{a} u \xi^i + \xi^i \left(\xi \cdot \bar{\varepsilon}\right) \,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Далее в работе я буду писать только косетные преобразования, т.к. формы Картана и инвариантная мера всегда будут инвариантны относительно преобразований подгруппы стабильности. Это касается и фактор-пространства $SU(2|2)/[SU(1|2) \times U(1)]$.

2.3 Лагранжиан

Лагранжиан нелинейной $d = 1$ σ-модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \nabla u^\alpha \bar{\nabla} \bar{u}_\alpha + \bar{\nabla} \bar{\zeta}_i \nabla \zeta^i + 2\kappa s. \tag{2.13}$$

Поля u^α и ζ^i взяты из (2.7). Здесь ∇ означает $\partial_t - is$, s вспомогательное калибровочное поле, κ – константа. Если раскрыть ∇, то получим

$$\mathcal{L} = \dot{u}^\alpha \dot{\bar{u}}_\alpha + \dot{\bar{\zeta}}_i \dot{\zeta}^i + is \left(\dot{u}^\alpha \bar{u}_\alpha - u^\alpha \dot{\bar{u}}_\alpha\right) - is \left(\dot{\zeta}^i \bar{\zeta}_i - \zeta^i \dot{\bar{\zeta}}_i\right) + s^2 + 2\kappa s. \tag{2.14}$$

Сделаем замену $\zeta^i = \mu^i e^{i\varphi}$, $u^\alpha = \rho^\alpha e^{i\varphi}$, где поле ρ^0 - действительное.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\;& \dot{\rho}^\alpha \dot{\bar{\rho}}_\alpha + \dot{\bar{\mu}}_i \dot{\mu}^i + is \left(\dot{\rho}^\alpha \bar{\rho}_\alpha - \rho^\alpha \dot{\bar{\rho}}_\alpha\right) - is \left(\dot{\mu}^i \bar{\mu}_i - \mu^i \dot{\bar{\mu}}_i\right) + s^2 + (\dot{\varphi})^2 - \\ & i\dot{\varphi} \left(\dot{\rho}^\alpha \bar{\rho}_\alpha - \rho^\alpha \dot{\bar{\rho}}_\alpha\right) + i\dot{\varphi} \left(\dot{\mu}^i \bar{\mu}_i - \mu^i \dot{\bar{\mu}}_i\right) + 2i\dot{\varphi}(is) + 2\kappa s \,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Мы можем исключить калибровочное поле, применив его уравнение движения, после чего лагранжиан примет вид

$$\mathcal{L} \;=\; \dot{\rho}^\alpha \dot{\bar{\rho}}_\alpha + \dot{\bar{\mu}}_i \dot{\mu}^i - \frac{1}{4} \left[i \left(\dot{\rho}^\alpha \bar{\rho}_\alpha - \rho^\alpha \dot{\bar{\rho}}_\alpha\right) - i \left(\dot{\mu}^i \bar{\mu}_i - \mu^i \dot{\bar{\mu}}_i\right) + 2\kappa \right]^2 . \tag{2.16}$$

После замены $z^a = \rho^a / \rho^0$, $\xi^i = \mu^i / \rho^0$ получаем Лагранжиан в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\;& \frac{(\dot{z}\dot{\bar{z}}) + \left(\dot{\bar{\xi}}\dot{\xi}\right)}{1 + (z\bar{z}) + \left(\bar{\xi}\xi\right)} - \frac{\left((\dot{z}\bar{z}) + \left(\bar{\xi}\dot{\xi}\right)\right)\left((z\dot{\bar{z}}) + \left(\dot{\bar{\xi}}\xi\right)\right)}{\left(1 + (z\bar{z}) + \left(\bar{\xi}\xi\right)\right)^2} - \\ & i\kappa \frac{\left((\dot{z}\bar{z}) - (z\dot{\bar{z}})\right) + \left(\left(\bar{\xi}\dot{\xi}\right) - \left(\dot{\bar{\xi}}\xi\right)\right)}{1 + (z\bar{z}) + \left(\bar{\xi}\xi\right)} \,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Преобразования полей определяются как

$$\delta z^a = -\left(\bar{\epsilon}_i^a - z^a \bar{\epsilon}_i^0\right)\xi^i,$$
$$\delta\xi^i = \epsilon_0^i + \epsilon_a^i z^a + (\bar{\epsilon}^0\xi)\xi^i. \qquad (2.18)$$

Для удобства вычислений сделаем замену $z^a \to \bar{z}_a$, $\xi^i \to \bar{\xi}_i$, $\kappa \to -N$. Также примем обозначения $Z^A = (z^a, \xi^i)$. В итоге получаем Лагранжиан следующего вида:

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{\left(\dot{Z}\dot{\bar{Z}}\right)}{1+\left(Z\bar{Z}\right)} - \frac{\left(\dot{Z}\bar{Z}\right)\left(Z\dot{\bar{Z}}\right)}{\left(1+\left(Z\bar{Z}\right)\right)^2} - iN\frac{\left(\dot{Z}\bar{Z}\right)-\left(Z\dot{\bar{Z}}\right)}{1+\left(Z\bar{Z}\right)}. \qquad (2.19)$$

Перепишем Лагранжиан следующим образом:

$$\mathcal{L} = \dot{Z}^B g_B^A \dot{\bar{Z}}_A - iN(\dot{Z}^B \mathcal{A}_B - \hat{\mathcal{A}}^A \dot{\bar{Z}}_A). \qquad (2.20)$$

Здесь g_B^A обозначает суперметрику Кэлера, компоненты которой, а также внешние калибровочные поля, равны

$$g_B^A \;=\; \frac{\delta_B^A}{1+\left(Z\bar{Z}\right)} - \frac{\bar{Z}_B Z^A}{\left(1+\left(Z\bar{Z}\right)\right)^2}, \qquad (2.21)$$

$$\mathcal{A}_B \;=\; \frac{\bar{Z}_B}{1+\left(Z\bar{Z}\right)}, \quad \hat{\mathcal{A}}^A = \frac{Z^A}{1+\left(Z\bar{Z}\right)}. \qquad (2.22)$$

Этот Лагранжиан можно также построить с помощью форм Картана или метрики Фубини-Штуди.

2.4 Каноническое квантование

Для квантования нужно найти Гамильтониан путём преобразований Лежандра. Обобщённые импульсы определяются как

$$P_B = \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}^B} = g_B^A \dot{\bar{Z}}_A - iN\mathcal{A}_B, \quad \hat{P}^A = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{Z}}_A} = (-1)^{f(A)}\left(\dot{Z}^B g_B^A + iN\hat{\mathcal{A}}^A\right) \qquad (2.23)$$

Из вида обобщённых импульсов следует закон комплексного сопряжения:

$$\overline{(P_A)} = (-1)^{f(A)}\,\hat{P}^A\,, \qquad (2.24)$$

- где функция $f(A)$ принимает значение 0 на бозонных индексах и 1 на фермионных индексах. Теперь, для квантования нужно найти Гамильтониан путём преобразований Лежандра. Гамильтониан, выраженный через обобщённые импульсы и координаты, есть

$$\mathcal{L} = \dot{Z}^B P_B + \dot{\bar{Z}}_A \hat{P}^A - \left(g^{-1}\right)_A^B \left(P_B + iN\mathcal{A}_B\right)\left(\hat{P}^A - (-1)^{f(A)}\,iN\hat{\mathcal{A}}^A\right). \qquad (2.25)$$

Окончательное выражение для классического Гамильтониана представляется в следующем виде:

$$H_{class} = \left(g^{-1}\right)_A^B \left(P_B + iN\mathcal{A}_B\right)\left(\hat{P}^A - (-1)^{f(A)}\,iN\hat{\mathcal{A}}^A\right) \qquad (2.26)$$

Квантование осуществляется путём замены обобщённых импульсов P_B, $\hat{P}^A$ на операторы $-i\partial_B$, $-i\partial^{\bar{A}}$. Квантовый Гамильтониан даётся выражением:

$$\hat{H} = (-1)^{f(A)+f(B)+f(A)f(B)} \nabla_B^{(N)} \left(g^{-1}\right)_A^B \nabla^{(N)\bar{A}}. \tag{2.27}$$

Здесь $\nabla_B^{(N)}$, $\nabla^{(N)\bar{A}}$ - ковариантные производные:

$$\nabla_B^{(N)} = (\partial_B - N\mathcal{A}_B), \quad \nabla^{(N)\bar{A}} = \left(-(-1)^{f(A)}\partial^A - N\hat{\mathcal{A}}^A\right), \tag{2.28}$$

удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям

$$\left[\nabla_B^{(N)}, \nabla^{(\tilde{N})\bar{A}}\right] = -\left(N + \tilde{N}\right) g_B^A\,. \tag{2.29}$$

2.5 Спектр

Введём Гильбертово пространство волновых функций путём последовательного построения. Волновую функцию низшего уровня Ландау представим как киральное суперполе $\Psi_{(0)}^{(N)}$, которое при действии Гамильтониана и сопряжённой ковариантной производной зануляется.

$$\nabla^{(N)\bar{A}}\Psi_{(0)}^{(N)} = \nabla^{(N)\bar{A}} K^{-N}\Phi = \partial^{\bar{A}}\Phi, \tag{2.30}$$

где $K = 1 + \left(Z\bar{Z}\right)$. Следующий уровень Ландау имеет волновую функцию

$$\Psi_{(1)}^{(N)} = \nabla_{C_1}^{(N_1)} K^{-N}\Phi^{C_1}\,, \tag{2.31}$$

где Φ^{C_1} - мультиплет киральных полей, и эта функция удовлетворяет условию

$$\partial^{\bar{A}}\Phi^{C_1} = 0\,. \tag{2.32}$$

Наконец, для уровня Ландау ℓ имеем

$$\Psi_{(\ell)}^{(N)} = \nabla_{C_1}^{(N_1)}\nabla_{C_2}^{(N_2)} \ldots \nabla_{C_\ell}^{(N_\ell)} K^{-N}\Phi^{C_1,C_2,\ldots,C_\ell}\,. \tag{2.33}$$

Используя свойство (анти)симметричности индексов киральных полей, получим вспомогательную формулу для любой дифференцируемой функции Φ^{AC} с антисимметризованными и симметризованными индексами:

$$\nabla_A^{(N)} g_C^B \Phi^{AC} = (-1)^{f(A)(f(B)+f(C))} g_C^B \nabla_A^{(N+2)}\Phi^{AC}. \tag{2.34}$$

$$\nabla^{(N)\bar{A}} g_C^B \Phi^{AB} = (-1)^{f(A)(f(B)+f(C))} g_C^B \nabla^{(N-2)\bar{A}}\Phi^{AB}. \tag{2.35}$$

Получаем также, что $N_i = N + 2(i-1)$. В итоге

$$E_\ell = \ell\,(\ell - 1 + 2N)\,. \tag{2.36}$$

Для уровней Ландау с номером, поревышающим 2, кратность вырождения волновой функции равна 4. Выпишем все 4 независимых суперполя:

$$
\begin{aligned}
\Psi^{(N)}_{u(\ell)} &= \nabla^{(N)}_u \dots \nabla^{(N+2\ell-2)}_u K^{-N} \Phi^{u\dots u}\,, \\
\Psi^{(N)}_{1(\ell)} &= \left[\sum_{p=1}^{\ell} \nabla^{(N)}_u \dots \nabla^{(N+2p-2)}_{\xi^1} \dots \nabla^{(N+2\ell-2)}_u\right] K^{-N} \Phi^{u\dots \xi^1}\,, \\
\Psi^{(N)}_{2(\ell)} &= \left[\sum_{p=1}^{\ell} \nabla^{(N)}_u \dots \nabla^{(N+2p-2)}_{\xi^2} \dots \nabla^{(N+2\ell-2)}_u\right] K^{-N} \Phi^{u\dots \xi^2}\,, \\
\Psi^{(N)}_{\xi(\ell)} &= \left[\sum_{r=1, r\neq p}^{\ell} \sum_{p=1}^{\ell} \nabla^{(N)}_u \dots \nabla^{(N+2p-2)}_{\xi^1} \dots \nabla^{(N+2r-2)}_{\xi^2} \dots \nabla^{(N+2\ell-2)}_u\right] K^{-N} \Phi^{u\dots \xi^1\xi^2}
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Полная волновая функция представима в виде суммы независимых волновых функций:

$$
\Psi^{(N)}_{(\ell)} = \Psi^{(N)}_{\xi(\ell)} + \Psi^{(N)}_{1(\ell)} + \Psi^{(N)}_{2(\ell)} + \Psi^{(N)}_{u(\ell)}\,. \tag{2.38}
$$

2.6 Нормы

$SU(m+1|n)$ инвариантная норма равна (см. [4])

$$
||\Psi||^2 = \int d\mu_0 \, \left[1 + \left(Z\bar{Z}\right)\right]^{n-m-1} \, \Psi^* \, \Psi \, = \int d\mu \, \Psi^* \, \Psi\,, \tag{2.39}
$$

$$
\int d\mu_0 = \int du d\bar{u} \prod_{i=1,2} \partial_{\xi^i} \partial^{\bar{\xi}_i}\,. \tag{2.40}
$$

Для простоты рассмотрим модель $SU(2|2)/\left[SU(1|2) \times U(1)\right]$, т.е. $n=2$ и $m=1$. Норма для неё равна

$$
||\Psi||^2 = \int d\mu_0 \, \Psi^* \, \Psi \, = \int d\mu \, \Psi^* \, \Psi\,, \tag{2.41}
$$

Запишем полезное свойство:

$$
\begin{aligned}
\int d\mu \, \Psi^* \, \nabla^{(N)\bar{A}} \, \Omega &= -(-1)^{f(A)f(\Psi)} \int d\mu \, \nabla^{(N)\bar{A}} \, \Psi^* \, \Omega = \\
& -(-1)^{f(A)f(\Psi)} \int d\mu \left(\nabla^{(N)}_A \, \Psi\right)^* \Omega.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Получаем результат

$$
||\Psi^{(N)}_{(\ell)}||^2 = \sigma_\ell \frac{(2N+2\ell-1)!\ell!}{2N+\ell-1)!} \int d\mu_0 \, \left(\Phi^{B_1\dots B_\ell}\right)^* g_{\bar{B}_1 A_1} \cdots g_{\bar{B}_\ell A_\ell} \, \Phi^{A_\ell \dots A_1}\,, \tag{2.43}
$$

где

$$
\sigma_\ell = (-1)^{\sum_i^\ell f(B_i) + \sum_i^{\ell-1} f(A_i) f(B_{i+1})}\,. \tag{2.44}
$$

3 SU(2|2)

Построим теперь модель Ландау на фактор-пространстве $SU(2|2)/[SU(2)\times U(1)\times U(1)]$. Пусть у нас имеется суперматрица, состоящая из следующих столбцов:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{\xi}_2 \\ \bar{\xi}_1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{\mu}_2 \\ \bar{\mu}_1 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Проводя над этими столбцами ортогонализацию Грамма-Шмидта, находим ортогональные друг к другу столбцы V_A. Таким образом, элемент группы f на фактор-пространстве можно представить в матричном виде:

$$f = \left(\frac{V_1}{\sqrt{K_1}}, \frac{V_2}{\sqrt{K_2}}, \frac{V_3}{\sqrt{K_3}}, \frac{V_4}{\sqrt{K_4}} \right), \tag{3.46}$$

где K_A – это нормировочные функции $\left(\bar{V}^A, V_B\right) = \delta^A_B K_A$. Для дальнейших вычислений достаточно знать V_1 и V_2:

$$V_1 = U_1.$$

$$V_2 = U_2 - V_1 \hat{u}.$$

В итоге, получаем:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{\xi}_2 \\ \bar{\xi}_1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{\mu}_2 \\ \bar{\mu}_1 \end{pmatrix} - \hat{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{\xi}_2 \\ \bar{\xi}_1 \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

где

$$\hat{u} = \frac{u + \xi\bar{\mu}}{K_1}. \tag{3.48}$$

Выпишем явно K_2 и K_1, которые мы будем использовать далее в этой работе:

$$\begin{aligned} K_2 &= 1 - \hat{u}\hat{\bar{u}}K_1 + (\mu \cdot \bar{\mu}) , \\ K_1 &= 1 + u\bar{u} + \left(\xi \cdot \bar{\xi}\right) . \end{aligned} \tag{3.49}$$

3.1 Формы Картана

Форма Картана - это специальный элемент алгебры Ли $f^{-1}df$. В матричном виде она записывается следующим образом:

$$\Omega = f^{-1}df = \begin{pmatrix} E^1_1 & E^1_2 & E^1_3 & E^1_4 \\ E^2_1 & E^2_2 & E^2_3 & E^2_4 \\ E^3_1 & E^3_2 & E^3_3 & E^3_4 \\ E^4_1 & E^4_2 & E^4_3 & E^4_4 \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

где

$$
\begin{aligned}
E^A_B &= \frac{\left(\bar{V}^A\,,\dot{V}_B\right)}{\sqrt{K_A K_B}}\,, \quad A \neq B, \\
E^A_A &= \frac{\left(\bar{V}^A,\dot{V}_A\right) - \left(\dot{\bar{V}}^A, V_A\right)}{2K_A}.
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

Форму Картана можно представить и в более привычном виде

$$
\Omega = f^{-1}df = \begin{pmatrix} 0 & -E^u & -E^{\xi^2} & -E^{\xi^1} \\ \bar{E}_{\bar{u}} & 0 & -E^{\mu^2} & -E^{\mu^1} \\ \bar{E}_{\bar{\xi}_2} & \bar{E}_{\bar{\mu}_2} & 0 & -E \\ \bar{E}_{\bar{\xi}_1} & \bar{E}_{\bar{\mu}_1} & \bar{E} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}-\mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}+\mathcal{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{C} \end{pmatrix}. \tag{3.52}
$$

Теперь, когда найдены формы Картана, надо найти, как они преобразуются при левом действии супергруппы. Для этого сначала надо найти преобразования полей.

3.2 Преобразования полей

Набор полей фактор-пространства обозначим через $\mathcal{Z} = (u, \bar{u}, \xi^i, \bar{\xi}_i, \mu^i, \bar{\mu}_i)$, а набор постоянных инфинитезимальных параметров через $\triangle = (a, \varepsilon^i, \theta^i)$ и $\bar{\triangle} = (\bar{a}, \bar{\varepsilon}_i, \bar{\theta}_i)$. Преобразования полей находятся из рассмотрения левого действия инфинитезимального элемента супергруппы на элемент супергруппы, параметризованный полями:

$$
f(\triangle, \bar{\triangle}) f(\mathcal{Z}) = f(\mathcal{Z}')h\,, \tag{3.53}
$$

где h – элемент из подгруппы стабильности $SU(2)\times U(1)\times U(1)$. Запишем вариации полей для преобразований группы $SU(2|2)$:

$$
\begin{aligned}
\delta u &= a + \bar{a}u^2 - \left(\xi\cdot\bar{\theta}\right) + u\left(\xi\cdot\bar{\varepsilon}\right)\,, \\
\delta\xi^i &= \varepsilon^i + u\theta^i + \bar{a}u\xi^i + \xi^i\left(\xi\cdot\bar{\varepsilon}\right)\,, \\
\delta\mu^i &= \theta^i + \bar{a}\left(\xi^i - u\mu^i\right) + \mu^i\left(\mu\cdot\bar{\theta}\right) + \left(\xi^i - u\mu^i\right)\left(\mu\cdot\bar{\varepsilon}\right)\,.
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

Напишем также, как преобразуются K_2 и K_1:

$$
\begin{aligned}
\delta K_1 &= \left[\bar{a}u + a\bar{u} + (\xi\cdot\bar{\varepsilon}) + \left(\varepsilon\cdot\bar{\xi}\right)\right]K_1\,, \\
\delta K_2 &= \left[-\bar{a}u - a\bar{u} - u\left(\mu\cdot\bar{\varepsilon}\right) - \bar{u}\left(\varepsilon\cdot\bar{\mu}\right) + \left(\mu\cdot\bar{\theta}\right) + \left(\theta\cdot\bar{\mu}\right)\right]K_2\,.
\end{aligned} \tag{3.55}
$$

Матрица h имеет вид:

$$
h = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma & -\bar{b} \\ 0 & 0 & b & 1-\frac{1}{2}\gamma \end{pmatrix}, \tag{3.56}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \bar{a}u - a\bar{u} + (\xi \cdot \bar{\varepsilon}) - \left(\varepsilon \cdot \bar{\xi}\right) \,, \\
\beta - \alpha &= a\bar{u} - \bar{a}u - u\,(\mu \cdot \bar{\varepsilon}) + \bar{u}\,(\varepsilon \cdot \bar{\mu}) + \left(\mu \cdot \bar{\theta}\right) - (\theta \cdot \bar{\mu}) \,.
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

Из (3.53) выводим закон преобразования формы Картана:

$$
\Omega' = h\Omega h^{-1} + hdh^{-1}. \tag{3.58}
$$

В итоге, получаем

$$
\begin{aligned}
\delta E^u &= \alpha E^u - \frac{\beta}{2} E^u \,, \\
\delta \bar{E}_{\bar{u}} &= -\alpha \bar{E}_{\bar{u}} + \frac{\beta}{2} \bar{E}_{\bar{u}} \,, \\
\delta \mathcal{A} &= -d\alpha \,, \\
\delta \mathcal{B} &= -d\beta \,.
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

3.3 Инвариантный Лагранжиан

Лагранжиан находится с помощью форм Картана из требования инвариантности действия. Но сначала в формах Картана надо произвести замену дифференциалов полей на их производные по времени. Т.е. $dz \to \dot{z}$ и т.д. Таким образом,

$$
\mathcal{L} = \bar{E}_{\bar{u}} E^u + iN\mathcal{A} + iM\mathcal{B}. \tag{3.60}
$$

Из преобразований форм Картана (3.59) проверяется инвариантность действия. Напишем Лагранжиан через столбцы V_A :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\left(\dot{\bar{V}}^1, V_2\right)\left(\bar{V}^2, \dot{V}_1\right)}{K_2 K_1} + iN \frac{\left(\bar{V}^1, \dot{V}_1\right) - \left(\dot{\bar{V}}^1, V_1\right)}{K_1} + \\
&\quad iM \left[\frac{\left(\bar{V}^2, \dot{V}_2\right) - \left(\dot{\bar{V}}^2, V_2\right)}{K_2} + \frac{\left(\bar{V}^1, \dot{V}_1\right) - \left(\dot{\bar{V}}^1, V_1\right)}{K_1} \right].
\end{aligned} \tag{3.61}
$$

Первый член в Лагранжиане - кинетический. Два остальных слагаемых - это одномерные члены типа Весса-Зумино-Виттена-Новикова с параметрами M и N. Функции от полей K_2 и K_1 можно характеризовать как потенциалы Кэлера, но пространство отображения не является Кэлеровым многообразием.

3.4 Суперполя

Суперполя в данной модели можно характеризовать двумя $U(1)$ зарядами. Соответствующие операторы $\hat{J}_3$ и $\hat{B}$ являются матричными частями дифференциальных операторов, представляющих $U(1) \times U(1)$ подгруппу $SU(2|1)$. Суперполя $\Psi^{(N,M)}(\mathcal{Z})$ являются собственными функциями $\hat{J}_3$ и $\hat{B}_3$ с собственными значениями N и M, соответственно. Остальные операторы из подгруппы стабильности ($SU(2)$) имеют нулевые собственные значения.

$$\hat{J}_3\,\Psi^{(N,M)}(\mathcal{Z}) = N\,\Psi^{(N,M)}(\mathcal{Z})\,, \quad \hat{B}\,\Psi^{(N,M)}(\mathcal{Z}) = M\,\Psi^{(N,M)}(\mathcal{Z})\,. \tag{3.62}$$

$U(1)\times U(1)$ калибровочно ковариантный дифференциал общего суперполя Ψ на суперфлаге имеет вид

$$\mathcal{D}\Psi = \left(d + \mathcal{A}\hat{J}_3 + \mathcal{B}\hat{B}\right)\Psi = \left(\mathcal{D}_A E^A - \bar{E}_A\bar{\mathcal{D}}^A\right)\Psi\,, \quad (\mathcal{D}_A)^\dagger = \bar{\mathcal{D}}^A \tag{3.63}$$

где

$$d = dZ^A\partial_A + d\bar{Z}_A\partial^A, \quad \mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}^A d\bar{Z}_A - dZ^A\mathcal{A}_A, \quad \mathcal{B} = \bar{\mathcal{B}}^A d\bar{Z}_A - dZ^A\mathcal{B}_A\,. \tag{3.64}$$

$\mathcal{D}_A$ – есть ковариантные производные при соответствующих формах Картана E^A. Переобозначим через $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}_+$ ковариантные производные соответствующие $\bar{E}_{\bar{u}}$, E^u. Также, $\mathcal{D}_i$, $\bar{\mathcal{D}}^i$, $\mathcal{S}_i$, $\bar{\mathcal{S}}^i$ - ковариантные производные, соответствующие E^{ξ^i}, $\bar{E}_{\bar{\xi}_i}$, E^{μ^i}, $\bar{E}_{\bar{\mu}_i}$:

$$\delta E^A = \left(\alpha\hat{J}_3 + \beta\hat{B}\right)E^A\,, \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^+ &= \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\left(-\partial^{\bar{u}} + \partial^{\bar{\xi}_i}\bar{\mu}_i - \left(\bar{\mathcal{A}}^{\bar{u}} + \bar{\mathcal{A}}^{\bar{\xi}_i}\bar{\mu}_i\right)\hat{J}_3\right)\,,\\
\mathcal{D}_+ &= \left(\partial_u + \mu^i\partial_{\xi^i} - \hat{J}_3\left(\mathcal{A}_u + \mu^i\mathcal{A}_{\xi^i}\right)\right)\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\,.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Ковариантные производные имеют противоположные по отношению к соответствующим формам Картана заряды. Из закона преобразования форм Картана можно выяснить их заряды, а следовательно, и заряды соответствующих производных. Из этих соображений находим, что $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}_+$ вместе с $\hat{J}_3$ образуют алгебру $su(2)$:

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{D}^+\,,\,\mathcal{D}_+\right] &= 2\hat{J}_3 - 2\,,\\
\left[\hat{J}_3\,,\,\mathcal{D}_+\right] &= -\mathcal{D}_+\,,\\
\left[\hat{J}_3\,,\,\mathcal{D}^+\right] &= \mathcal{D}^+\,.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

В общем, операторы подгруппы стабильности ($U(1)\times U(1)\times SU(2)$), вместе с ковариантными производными, образуют $SU(2|2)$ алгебру.

Рассмотрим следущее ковариантное условие:

$$\partial^{\bar{u}}\Phi^{(N,M)} = \partial^{\bar{\xi}_i}\Phi^{(N,M)} = \partial^{\bar{\mu}_i}\Phi^{(N,M)} = 0\,. \tag{3.68}$$

Из возможности наложения таких условий следует, что существует киральное подпространство

$$\Psi^{(N,M)} = K_1^{-N}\left(K_1K_2\right)^{-M}\Phi^{(N,M)}\left(u,\,\xi^i,\,\mu^i\right)\,. \tag{3.69}$$

При этом, используя условия (3.68), находим, что

$$\bar{\mathcal{D}}^i\Psi^{(N,M)} = 0, \quad \bar{\mathcal{S}}^i\Psi^{(N,M)} = 0, \quad \mathcal{D}^+\Psi^{(N,M)} = 0 \tag{3.70}$$

Суперполя $\Psi^{(N,M)}$ будем называть киральными суперполями, а суперполя $\Phi^{(N,M)}$ - редуцированными киральными суперполями.

3.5 Каноническое квантование

Квантование проводим таким же образом, как и в модели суперсферы. Обозначим набор полей фактор-пространства $\mathcal{Z}$ через координаты Z^A и $\bar{Z}_A$. Таким образом, ранее введённый Лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L} = \dot{Z}^B g_B^A \dot{\bar{Z}}_A - iN(\dot{Z}^B \mathcal{A}_B - \bar{\mathcal{A}}^A \dot{\bar{Z}}_A) - iM(\dot{Z}^B \mathcal{B}_B - \bar{\mathcal{B}}^A \dot{\bar{Z}}_A)\,, \tag{3.71}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_B &= \partial_B \ln K_1\,, \quad \mathcal{B}_B = \partial_B \ln(K_1 \cdot K_2)\,, \\ (-1)^{f(A)}\,\bar{\mathcal{A}}^A &= \partial^A \ln K_1\,, \quad (-1)^{f(A)}\,\bar{\mathcal{B}}^A = \partial^A \ln(K_1 \cdot K_2)\,. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Функция $f(A)$ принимает значение 0 на бозонных индексах и 1 на фермионных индексах. Вычислим обобщённые импульсы:

$$\begin{aligned} P_B &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}^B} = g_B^A \dot{\bar{Z}}_A - iN\mathcal{A}_B - iM\mathcal{B}_B, \\ \hat{P}^A &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{Z}}_A} = (-1)^{f(A)} \left(\dot{Z}^B g_B^A + iN\bar{\mathcal{A}}^A + iM\bar{\mathcal{B}}^A \right). \end{aligned} \tag{3.73}$$

Из вида обобщённых импульсов следует закон комлексного сопряжения:

$$\overline{(P_A)} = (-1)^{f(A)}\,\hat{P}^A\,. \tag{3.74}$$

Также, проводим преобразования Лежандра. Гамильтониан, выраженный через обобщённые импульсы и координаты, есть

$$H_N = \frac{K_1}{K_2}\left[\left(P_u + \mu^i P_{\xi^i}\right) + iN\left(\mathcal{A}_u + \mu^i \mathcal{A}_{\xi^i}\right)\right]\left[\left(\hat{P}^{\bar{u}} + \bar{\mu}_i \hat{P}^{\bar{\xi}_i}\right) - iN\left(\bar{\mathcal{A}}^{\bar{u}} + \bar{\mathcal{A}}^{\bar{\xi}_i}\bar{\mu}_i\right)\right].$$

Заметим, что Гамильтониан не зависит от параметра M. Также, на систему наложены следующие комплексные связи:

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi^i} &= \left(P_{\xi^i} + iN\mathcal{A}_{\xi^i} + iM\mathcal{B}_{\xi^i}\right) - \frac{\bar{\mu}_i - \hat{u}\bar{\xi}_i}{1 - \hat{u}\bar{u}}\left(P_u + iN\mathcal{A}_u + iM\mathcal{B}_u\right)\,, \\ \varphi_{\mu^i} &= \left(P_{\mu^i} + iN\mathcal{A}_{\mu^i} + iM\mathcal{B}_{\mu^i}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Квантование осуществляется путём замены обобщённых импульсов P_B, $\hat{P}^A$ на операторы $-i\partial_B$, $-i\partial^{\bar{A}}$. В итоге, получаем квантовый Гамильтониан

$$\hat{H}_N = \nabla^{(N)} \frac{K_1}{K_2} \bar{\nabla}^{(N)}\,. \tag{3.76}$$

Здесь $\nabla^{(N)}$ и $\bar{\nabla}^{(N)}$ - полуковариантные производные, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla^{(N)} &= \partial_u + \mu^i \partial_{\xi^i} - N\left(\mathcal{A}_u + \mu^i \mathcal{A}_{\xi^i}\right)\,, \\ \bar{\nabla}^{(N)} &= -\partial^{\bar{u}} + \partial^{\bar{\xi}_i}\bar{\mu}_i - N\left(\bar{\mathcal{A}}^{\bar{u}} + \bar{\mathcal{A}}^{\bar{\xi}_i}\bar{\mu}_i\right)\,. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Гамильтониан можно представить в виде произведения двух ковариантных производных $\mathcal{D}_+$, $\mathcal{D}^+$. При этом, данный Гамильтониан должен действовать на суперполе с зарядом N:

$$\hat{H}\Psi^{(N,M)} = \mathcal{D}_+ \mathcal{D}^+ \Psi^{(N,M)} . \qquad (3.78)$$

Чтобы учесть связи, достаточно принять, что

$$\hat{\bar{\varphi}}^A \Psi^{(N,M)} = 0\,, \quad \bar{\nabla}^{(N)} \Psi^{(N,M)} = 0\,. \qquad (3.79)$$

Эти условия аналогичны условиям киральности (3.68). Из этих условий также выводится голоморфность редуцированного суперполя $\Phi^{(N,M)}\,(u,\,\xi,\,\mu)$, т.е. его производные по сопряженным полям равны нулю.

3.6 Спектр

Гильбертово пространство волновых функций можно представить через киральные суперполя. Например, действие Гамильтониана на киральное суперполе $\Psi^{(N,M)}$ даёт ноль. Таким образом, киральное суперполе $\Psi^{(N,M)}$ можно принять за волновую функцию нулевого уровня Ландау $\Psi^{(N,M)}_{(0)}$. Волновые функции более высоких уровней Ландау построим последовательным действием ковариантной производной $\mathcal{D}_+$ на $\Psi^{(N,M)}_{(0)}$. Волновая функция уровня ℓ выглядит как

$$\Psi^{(N,M)}_{(\ell)} = \left(\mathcal{D}_+\right)^\ell \Psi^{(N+\ell,M-\ell/2)}_{(0)}\,, \qquad (3.80)$$

где $\Psi^{(N+\ell,M-\ell/2)}_{(0)}$ - киральное суперполе со смещёнными зарядами. Заряд смещён для компенсации смещения зарядов операторами $\mathcal{D}_+$. Применяя коммутаторы ковариантных производных и свойство оператора $\hat{J}_3$, находим собственные значения Гамильтониана. Тогда, энергия E_ℓ уровня Ландау ℓ равна

$$E_\ell = \ell\left(2N + \ell - 1\right) . \qquad (3.81)$$

Такой же спектр энергий получался в сферической модели Ландау.

3.7 Нётеровские заряды

$SU(2|2)$ инвариантность модели предполагает существование Нётеровских зарядов. Эти заряды находятся из Нётеровского тока

$$J = \left(\delta Z^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Z}^A} + \delta \bar{Z}_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{Z}}_A}\right) - \mathcal{A} = \left(\delta Z^B P_B + \delta \bar{Z}_A \hat{P}^A\right) + i\left(N\alpha + M\beta\right), \qquad (3.82)$$

где

$$\mathcal{A} = \delta\mathcal{L} = -i\frac{\partial}{\partial t}\left(N\alpha + M\beta\right) . \qquad (3.83)$$

Квантование проводим как и ранее, заменяя обобщённые импульсы операторами дифференцирования. Полный нётеровский ток $\hat{J}$ состоит из нётеровских зарядов $\hat{S}$, $\hat{\bar{S}}$, $\hat{Q}$, $\hat{\bar{Q}}$, $\hat{J}_-$, $\hat{J}_+$:

$$\hat{J} = \left(\varepsilon \cdot \hat{\bar{Q}}\right) + \left(\bar{\varepsilon} \cdot \hat{Q}\right) + \left(\theta \cdot \hat{\bar{S}}\right) + \left(\bar{\theta} \cdot \hat{S}\right) + a\hat{J}_- - \bar{a}\hat{J}_+. \qquad (3.84)$$

Нётеровские заряды определяются выражениями:

$$
\begin{aligned}
\bar{Q}_i &= \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \bar{\xi}_i \left(\bar{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right) + \bar{\mu}_i \left((\bar{\xi} - \bar{u}\bar{\mu}) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} \right) + \bar{\xi}_i \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + N\bar{\xi}_i + M \left(\bar{\xi}_i - \bar{u}\bar{\mu}_i \right) \,, \\
Q^i &= \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_i} - \xi^i \left(\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \right) - \mu^i \left((\xi - u\mu) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \right) - \xi^i u \frac{\partial}{\partial u} + N\xi^i + M \left(\xi^i - u\mu^i \right) \,, \\
\bar{S}_i &= \frac{\partial}{\partial \mu^i} + u \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \bar{\mu}_i \left(\bar{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} \right) - \bar{\xi}_i \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + M\bar{\mu}_i \,, \\
S^i &= \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}_i} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^i} - \mu^i \left(\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \xi^i \frac{\partial}{\partial u} + M\mu^i \,, \\
J_- &= \frac{\partial}{\partial u} + \bar{u}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \bar{u} \left(\bar{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right) + \left((\bar{\xi} - \bar{u}\bar{\mu}) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} \right) + \bar{u}N \,, \\
-J_+ &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + u^2 \frac{\partial}{\partial u} + u \left(\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \left((\xi - u\mu) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \right) - uN \,.
\end{aligned} \tag{3.85}
$$

Если проверить все (анти)коммутационные соотношения Нётеровских зарядов, то окажется, что Нётеровские заряды совпадают с генераторами алгебры $su(2|2)$ (2.6) и (2.5). Соответствующий оператор J_3 из этой алгебры равен

$$
J_3 = \left(\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{u}} - u \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} \left(\bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{2} \left(\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + N \,, \tag{3.86}
$$

Если в ковариантном дифференциале $\mathcal{D}$ заменить $\hat{J}_3$ на N, то действие Нётеровского тока $\hat{J}$ на ковариантный дифференциал $\mathcal{D}$ даёт ноль. Из этого свойства следует, что ковариантные производные “слабо” (анти)коммутируют с Нётеровскими зарядами.

3.8 Нормы

В Гильбертовом пространстве должны быть определены нормы. Введём инвариантные нормы для Гильбертового пространства следующим образом

$$
||\Psi||^2 = \int d\mu_0 \, \frac{K_2}{K_1} \, \Psi^* \, \Psi \, = \int d\mu \, \Psi^* \, \Psi \,, \tag{3.87}
$$

где $d\mu$ инвариантная мера. Эта мера инвариантна относительно преобразований $SU(2|2)$ и имеет вид:

$$
\int d\mu = \int d\mu_0 \frac{K_2}{K_1} \,, \tag{3.88}
$$

где

$$
\int d\mu_0 = \int du d\bar{u} \prod_{i=1,2} \partial_{\xi^i} \partial^{\bar{\xi}_i} \prod_{i=1,2} \partial_{\mu^i} \partial^{\bar{\mu}_i} \,. \tag{3.89}
$$

Вычислим норму для волновой функции уровня Ландау ℓ

$$
\begin{aligned}
||\Psi^{(N,M)}_{(\ell)}||^2 &= \int d\mu \, \left((\mathcal{D}_+)^l \, \Psi^{(N+\ell, M-\ell/2)}_{(0)} \right)^* (\mathcal{D}_+)^l \, \Psi^{(N+\ell, M-\ell/2)}_{(0)} = \\
& \ell! \, \frac{(2N+\ell-1)!}{(2N-1)!} \int d\mu \, \left(\Psi^{(N+\ell, M-\ell/2)}_{(0)} \right)^* \Psi^{(N+\ell, M-\ell/2)}_{(0)} \,.
\end{aligned} \tag{3.90}
$$

Норму любого уровня Ландау можно представить через норму нулевого, но со смещёнными зарядами $N+\ell$ и $M-\ell/2$), и с определённым коэффицентом. Этот коэффициент выражается через произведение энергий всех уровней Ландау ниже ℓ, исключая нулевой:

$$||\Psi_{(\ell)}^{(N,M)}||^2 = ||\Psi_{(0)}^{(N+\ell,M-\ell/2)}||^2 \prod_{n=1,2,\ldots\ell} E_n \,. \tag{3.91}$$

Разложим редуцированное суперполе $\Phi_{(0)}^{(N,M)}(u,\,\xi,\,\mu)$ в ряд по фермионным полям:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(0)}^{(N,M)}(u,\,\xi,\,\mu) = A(u) - \xi^2\left(\mu^1 - \frac{\xi^1}{2N}\partial_u\right)F_{\xi^2,\mu^1}(u) + \xi^1\left(\mu^2 - \frac{\xi^2}{2N}\partial_u\right)F_{\xi^1,\mu^2}(u) + \\
&\xi^i\mu^i F_{\xi^i,\mu^i}(u) + \left(\mu^1\mu^2 - \frac{\xi^1\mu^2}{2N+2}\partial_u - \frac{\mu^1\xi^2}{2N+2}\partial_u + \frac{2\xi^1\xi^2}{4N+2}\partial_u\partial_u\right)F_\mu(u) + \\
&\xi^1\xi^2 F_\xi(u) + \xi^1\xi^2\mu^1\mu^2 B(u) + \xi^i\psi_{\xi^i}(u) + \left(\mu^i - \frac{\xi^i}{2N+1}\partial_u\right)\psi_{\mu^i}(u) + \\
&\xi^i\mu^i\left(\mu^j - \frac{\xi^j}{2N+1}\partial_u\right)\chi_{\mu^j}(u) + \xi^i\mu^i\xi^j\chi_{\xi^j}(u)\,, \quad i\neq j\,.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Здесь A, B, F_{ξ^2,μ^1}, $F_{\xi^i,\mu^i}(u)$, F_{ξ^1,μ^2}, F_ξ, F_μ –бозонные поля, и ψ,χ–фермионные поля. Дифференциальные операторы $SU(2|2)$, полученные из Нётеровских зарядов, действуют на эти поля. Представим операторы $SU(2)$ подгруппы в таком виде, в каком они действуют на Φ:

$$\begin{aligned}
J_- &= \frac{\partial}{\partial u}, \\
J_+ &= u^2\frac{\partial}{\partial u} + u\left(\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \left((\xi - u\mu)\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}\right) - 2uN \\
J_3 &= -u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + N\,.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Представим нулевую норму в терминах полей разложенного редуцированного суперполя:

$$\begin{aligned}
&||\Psi_{(0)}^{(N,M)}||^2 = \int \frac{du d\bar u}{(1+u\bar u)^{2N+2}}\Bigg[2M(2M-1)(2M+2N+1)(2M+2N)\bar A A + \\
&2M(2M-1)\,(1+u\bar u)^2\,\bar F^{\bar\xi}F_\xi + (2M-1)(2M+2N)\Bigg(\bar F^{\bar\xi_i,\bar\mu_i}F_{\xi^i,\mu^i} + \\
&\frac{(2N+1)}{2N}\left(\bar F^{\bar\xi_1,\bar\mu_2}F_{\xi^1,\mu^2} + \bar F^{\bar\xi_2,\bar\mu_1}F_{\xi^2,\mu^1}\right) + \frac{1}{2N}\left(\bar F^{\bar\xi_1,\bar\mu_2}F_{\xi^2,\mu^1} + \bar F^{\bar\xi_2,\bar\mu_1}F_{\xi^1,\mu^2}\right)\Bigg) + \\
&\frac{(2M+2N+1)(2M+2N)(2N+3)}{(2N+1)\,(1+u\bar u)^2}\bar F^{\bar\mu}F_\mu + \bar B B + \frac{(2N+2)(2M+2N)}{(1+u\bar u)\,(2N+1)}\bar\chi^{\bar\mu_i}\chi_{\mu^i} + \\
&+(2M-1)\,(1+u\bar u)\,\bar\chi^{\bar\xi_i}\chi_{\xi^i} + \frac{(2M-1)(2N+2)(2M+2N+1)(2M+2N)}{(1+u\bar u)\,(2N+1)}\bar\psi^{\bar\mu_i}\psi_{\mu^i} + \\
&+(2M-1)(2M)(2M+2N)\,(1+u\bar u)\,\bar\psi^{\bar\xi_i}\psi_{\xi^i}\Bigg]\,.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Чтобы интеграл сходился, параметр N должен быть положительным числом. Для сходимости интеграла поля A, B, F_{ξ^i,μ^i}, F_{ξ^2,μ^1}, F_{ξ^1,μ^2} должны быть полиномами степени $\leq 2N$ по u. Это означает, что каждое из таких полей содержит $2N+1$ размерное представление группы $SU(2)$ со спином N. Бозонные поля в таком случае образуют приводимое представление $[\mathbf{6}\otimes[\mathbf{2N+1}]]\oplus[\mathbf{2N-1}]\oplus[\mathbf{2N+3}]$ размерности $8(2N+1)$. Фемионные поля образуют приводимое представление $[\mathbf{4}\otimes[\mathbf{2N}]]\oplus[\mathbf{4}\otimes[\mathbf{2N+2}]]$ тоже размерности $8(2N+1)$. В таблице приведено соответствие между полями и $SU(2)$ спинами:

$fields$	$amount$	$spin$	$dimension$
F_ξ	1	$N-1$	$2N-1$
$\chi_{\xi^i},\psi_{\xi^i}$	4	$N-1/2$	$2N$
A,B,F_{ξ^i,μ^j}	6	N	$2N+1$
$\chi_{\mu^i},\psi_{\mu^i}$	4	$N+1/2$	$2N+2$
F_μ	1	$N+1$	$2N+3$

(3.95)

Оператор J_3 является собственным оператором для членов разложения в ряд $\Psi_{(0)}^{(N,M)}$. Собственные числа этих членов равны $u\partial_u - s$ (степень полинома по u минус соответствующий спин). J_+, J_- – операторы повышения и понижения собственных чисел генератора J_3 - другими словами, они повышают и понижают степени полиномов по u.

3.9 Планарный предел

Рассмотрим планарный предел модели суперфлага. Чтобы перейти к планарной модели, надо сделать предельный переход

$$K_1 = \ln(1+\left(\xi\cdot\bar\xi\right)+u\bar u) \to r\ln\left(1+\frac{\left(\xi\cdot\bar\xi\right)+u\bar u}{r}\right). \tag{3.96}$$

Получаем Лагранжиан следующего вида:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{\left[\dot u+\left(\dot\xi\cdot\bar\mu\right)\right]\left[\dot{\bar u}+\left(\mu\cdot\dot{\bar\xi}\right)\right]}{1+(\mu\cdot\bar\mu)} - iN\left[\left(\dot\xi\cdot\bar\xi\right)-\left(\xi\cdot\dot{\bar\xi}\right)+(\dot u\bar u-u\dot{\bar u})\right]- \\ &\quad iM\frac{(\dot\mu\cdot\bar\mu)-(\mu\cdot\dot{\bar\mu})}{K_2}\,,\end{aligned} \tag{3.97}$$

где

$$K_2 = 1+(\mu\cdot\bar\mu)\,. \tag{3.98}$$

Набор полей $\xi,\bar\xi,u,\bar u$ параметризует суперплоскость. Их преобразования сводятся к (супер)трансляциям и $SU(2|1)$ косетным поворотам. Поля $\mu,\bar\mu$ есть координаты фактор-суперпространства $SU(2|1)/[SU(2)\times U(1)]$ со следующими трансформационными законами:

$$\begin{aligned}\delta u &= a-\left(\xi\cdot\bar\theta\right)\,,\\ \delta\xi^i &= \varepsilon^i+u\theta^i\,,\\ \delta\mu^i &= \theta^i+\mu^i\left(\mu\cdot\bar\theta\right)\,.\end{aligned} \tag{3.99}$$

При предельном переходе многообразие $SU(2|2)/[SU(2)\times U(1)\times U(1)]$ переходит в прямое произведение суперплоскости и фермионной нечётной сферы $R^{(1|2)}\otimes SU(2|1)/[SU(2)\times U(1)]$. Соответствующая функция K_2 преобразуется по закону

$$\delta K_2 \;=\; \left[\left(\mu\cdot\bar\theta\right)+(\theta\cdot\bar\mu)\right]K_2\,, \tag{3.100}$$

а гамильтониан принимает вид

$$\hat H_N=\frac{\nabla^{(N)}\bar\nabla^{(N)}}{K_2}\,. \tag{3.101}$$

Полуковариантные производные $\nabla^{(N)}$ и $\bar\nabla^{(N)}$ выражаются как:

$$\begin{aligned}\nabla^{(N)} &= \partial_u+\mu^i\partial_{\xi^i}-N\left(\bar u+\left(\mu\cdot\bar\xi\right)\right)\,,\\ \bar\nabla^{(N)} &= -\partial^{\bar u}+\partial^{\bar\xi_i}\bar\mu_i-N\left(u+(\xi\cdot\bar\mu)\right)\,.\end{aligned} \tag{3.102}$$

Рассмотрим киральные суперполя Ψ в следующем виде

$$\Psi^{(N,M)}=e^{-N\left(u\bar u+\left(\xi\cdot\bar\xi\right)\right)}K_2^{-M}\Phi^{(N,M)}\,. \tag{3.103}$$

Волновая функция уровня Ландау ℓ тогда даётся выражением:

$$\Psi^{(N,M)}_{(\ell)}=\left(\nabla^{(N)}\right)^\ell\Psi^{(N,M)}_{(0)}\,, \tag{3.104}$$

а спектр - формулой:

$$E_\ell=2N\ell\,. \tag{3.105}$$

Нётеровские заряды представляются в виде:

$$\begin{aligned}\bar Q_i &= \frac{\partial}{\partial\xi^i}+\bar\xi_iN\,,\\ \bar S_i &= \frac{\partial}{\partial\mu^i}+\bar\mu_i\left(\bar\mu\cdot\frac{\partial}{\partial\bar\mu}\right)+M\bar\mu_i\,,\\ J_- &= \frac{\partial}{\partial u}+\bar uN\,.\end{aligned} \tag{3.106}$$

Супергруппу, относительно которой инвариантна модель, можно идентифиицировать, вычислив (анти)коммутаторы Нётеровских зарядов. Запишем их ненулевые (анти)коммутаторы:

$$\begin{aligned}&\left\{Q^i\,,\,\bar Q_j\right\}=2N\delta^i_j\,,\\ &\left\{S^i\,,\,\bar S_i\right\}=4M+\left(\bar\mu\cdot\frac{\partial}{\partial\bar\mu}\right)-\left(\mu\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\,,\\ &\left\{S^1\,,\,\bar S_2\right\}=\left(\bar\mu_2\cdot\frac{\partial}{\partial\bar\mu_1}\right)-\left(\mu^1\cdot\frac{\partial}{\partial\mu^2}\right)\,,\text{к.с.}\\ &\left[J_+\,,\,J_-\right]=-2N\,.\end{aligned} \tag{3.107}$$

Нормы определяются формулой

$$||\Psi^{(N,M)}_{(\ell)}||^2 \;=\; \int d\mu \, \left(\left(\nabla^{(N)}\right)^l \, \Psi^{(N,M)}_{(0)} \right)^* \left(\nabla^{(N)}\right)^l \, \Psi^{(N,M)}_{(0)} = \ell! \, (2N)^\ell \int d\mu \, \left(\Psi^{(N,M)}_{(0)} \right)^* \Psi^{(N,M)}_{(0)} \,. \tag{3.108}$$

Чтобы интеграл сходился, необходимо чтобы выполнялось условие $N > 0$. Тогда

$$||\Psi^{(N,M)}_{(\ell)}||^2 = ||\Psi^{(N,M)}_{(0)}||^2 \prod_{n=1,2,\ldots\ell} E_n \,. \tag{3.109}$$

Нормы для всех уровней Ландау одинаковы (с точностью до положительного коэффициента). Отсутствуют смещения зарядов с ростом номера уровня.

4 Заключение

В данной работе с помощью форм Картана и альтернативного метода введения нединамического калибровочного поля впервые были построены Лагранжианы общей суперсимметриной модели Ландау на косетных многообразиях $SU(m+1|n)/SU(m|n) \times U(1)$. Было проведено их гамильтоново квантование, найден спектр гамильтониана и вычислены инвариантные нормы волновых функций.

Кроме того, с помощью форм Картана был найден Лагранжиан модели Ландау на многобразии $SU(2|2)/[SU(2) \times U(1) \times U(1)]$. Лагранжиан состоит из кинетического члена и двух одномерных членов типа Весса-Зумино-Виттена-Новикова с параметрами M и N.

Модель была проквантована канонически. Следует отметить, что Гамильтониан не зависит от параметра M. После введения связей в пространстве отображения были определены ковариантные производные $\mathcal{D}$, в терминах которых можно представить Гамильтониан. Киральное подпространство было определено с помощью ковариантных производных. Далее, Гильбертово пространство волновых функций было построено в терминах киральных суперполей $\Psi^{(N,M)}_{(\ell)}$ и ковариантных производных $\mathcal{D}_+$. Для уровня Ландау ℓ с волновой функцией $\Psi^{(N,M)}_{(\ell)}$ энергия равна

$$E_\ell = \ell\,(2N + \ell - 1)\ . \tag{4.110}$$

Нётеровские заряды после квантования образуют алгебру группу симметрий $SU(2|2)$. Инвариантная норма была введена так, что норму любого уровня Ландау можно представить через норму нулевого, но со смещёнными зарядами $N + \ell$ и $M - \ell/2$. Был найден вид интеграла нормы через поля, в ряд по которым разлагается редуцированное суперполе. Эти поля являются спиновыми полями, которым соответствуют целые и полуцелые спины (см. табл. (3.95)).

Список литературы

[1] Andrey Beylin, Thomas L. Curtright, Evgeny Ivanov, Luca Mezincescu, Paul K. Townsend, *"Unitary Spherical Super-Landau Models"*, JHEP 10 (2008) 069; arXiv:0806.4716.

[2] E. Ivanov, L .Mezincescu, A .Pashnev, P. K. Townsend, *Odd coset quantum mechanics*, `hep-th/0404108`, Phys. Lett. B566 (2003) 175-182.

[3] E. Ivanov, L. Mezincescu and P. K. Townsend, *A super-flag Landau model*, `hep-th/0404108`.

[4] E. Ivanov, L. Mezincescu and P. K. Townsend, "Fuzzy $CP(n|m)$ as a quantum superspace", `hep-th/0311159`

[5] E. Ivanov, L. Mezincescu and P. K. Townsend, *Planar super-Landau models*, JHEP **0601** (2006) 143, `hep-th/0510019`.