Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Факультет общей и прикладной физики
Кафедра фундаментальных и прикладных проблем физики микромира

Объединенный институт ядерных исследований
Учебно-научный центр

Михаил Гойхман

Редукция Полмайера в суперструне на $AdS_n \times S^n$ и ее связь с $\mathcal{N} = (4,4)$ и $\mathcal{N} = (8,8)$ суперрасширениями модели sine-Gordon

Магистерская диссертация

Научный руководитель
д. ф.-м. н., проф. Е. А. Иванов

Рецензент
к. ф.-м. н., доц. С. А. Федорук

Дубна, июнь 2011

Содержание

1 Введение

В [1, 2] М. Григорьев и А. Цейтлин (см. также [3, 4, 5, 6]) применили процедуру редукции Полмайера [7] к устранению нединамических степеней свободы суперструны Грина-Шварца типа-IIB на $AdS_5 \times S^5$ и струны Грина-Шварца на $AdS_3 \times S^3$ и $AdS_2 \times S^2$. В последнем случае они продемонстрировали, что окончательное действие обладает $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметрией на мировой поверхности и является ничем иным как действием $\mathcal{N} = (2,2)$ суперрасширения комбинированной модели sine-sinh-Gordon (для краткости мы ссылаемся на такие модели как sine-Gordon, подразумевая гиперболическую часть присутствующей). Тогда же был поставлен вопрос о возможной суперсимметрии на мировой поверхности в действии Полмайер-редуцированной (ПР) суперструны на $AdS_3 \times S^3$ и на $AdS_5 \times S^5$. До написания нашей с Е.А. Ивановым работы [8], на основании которой построена данная диссертация, этот вопрос оставался неразрешенным.

В этой работе предлагается решение задачи суперсимметрии на мировой поверхности в действии ПР суперструны на $AdS_n \times S^n$ в случаях $n = 3$ и $n = 5$. Решение основывается на следующих простых идеях.

Следуя [1, 2], мы используем суперматричные обозначения для полей, входящих в действие, т.е. записываем действие ПР суперструны в форме максимально близкой к таковой для суперсимметричных калибровочных WZW (Wess-Zumino-Witten) моделей (см. [9, 10, 11] и ссылки там). Новые моменты по сравнению с [1, 2] следующие.

Во-первых, мы систематически используем представление Полякова-Вигмана [12, 13] для калибрововчных полей в обобщенных gWZW (gauged - калибровочных - WZW) моделях

$$A_+ = u\partial_+ u^{-1}\,, \quad A_- = \bar{u}\partial_- \bar{u}^{-1}\,, \tag{1.1}$$

где u и $\bar{u}$ есть две независимые матрицы, принимающие значения в калибровочной группе H. Благодаря такому представлению мы получаем модифицированные уравнения движения для калибровочных полей [1].

Во-вторых, мы выделям из исходного gWZW действия (чисто бозонной свободной части действия ПР суперструны), записанного в [1, 2], член, зависящий только от полей u и $\bar{u}$, который можно компенсировать, модификацией исходного действия добавкой к нему члена

$$S_a = S^{(H)}_{WZW}(B)\,, \quad B = u^{-1}\bar{u}\,. \tag{1.2}$$

Ясно, что такая добавка не отражается на уравнениях движения физических матричных полей $g, \Psi_{L,R}$, получающихся в результате редукции Полмайера, а отражается только на уравнениях движения для калибровочных полей. Мы исследуем суперсимметрию такого модифицированного действия и используем результаты для демонстрации суперсимметрии исходного действия ПР суперструны.

При специально выбранном коэффициенте перед добавленным членом в действии уравнения движения для калиброчных полей удовлетворяются автоматически как следствие уравнений движения для физических полей, и потому не налагают никаких дополнительных ограничений на калибровочные поля. На самом деле значение этого коэффициента

[1] Такое представление для $A_\pm$ уже было использовано в [1] и [4]. Однако, в этой работе мотивация другая.

таково, что при этом $S_{gWZW}+S_a = [S_{WZW}(u^{-1}g\bar{u})-S^{(H)}_{WZW}(B)]+S^{(H)}_{WZW}(B) = S_{WZW}(u^{-1}g\bar{u})$, как уже отмечено в предыдущем абзаце. Замечательно то, что исследование суперсимметрии вне массовой поверхности удобно осуществлять именно исходя из модифицированного gWZW действия, после чего становится ясным как показать суперсимметрию исходного действия. В то время как модифицированное действие удобно для подхода к вопросу о скрытой суперсимметрии, само по себе оно не практично в квантовой модели, из-за неверного знака перед кинетическими членами тех полей (и следовательно их духовой сущности), которые калибровались в исходном действии и не калибруются в модифицированном.

Симметрия реализована преобразованиями, которые напоминают предложенные в [1] как обобщение таковых для $n = 2$ модели; однако они содержат нелокальные члены и не требуют дополнительных (неосуществимо сильных) ограничений на матричный параметр преобразований, наложенных в [1]. Мы находим $(4,4)$-параметрическую киральную суперсимметрию в $n = 3$ случае и $(8,8)$-параметрическую киральную суперсимметрию в $n = 5$ случае. Затем мы вычисляем замыкание на массовой оболочке, и обнаруживаем что суперсимметрия на мировой поверхности, как и положено, замыкается на $2d$ трансляциях, по модулю некоторых калиброчных преобразований.

В наших обозначениях мы по большей части следуем таковым, используемым в [1] и [2]; мы используем основные результаты тех работ как условие задачи, хотя некоторые ключевые моменты вывода ПР суперструнных уравнений также описываются для полноты изложения. Это описано в разделе 2. В разделе 3 мы переходим к формулировке модифицированного gWZW действия с фермионными и потенциальными членами, дающего те же ПР суперструнные уравнения, что и в [1, 2]. Затем мы показываем, что оно обладает киральной суперсимметрией на мировом листе: с $(4,4)$ нечетными генераторами в случае $n = 3$ и $(8,8)$ нечетными генераторами в случае $n = 5$. Также мы изучаем замыкание и особенности суперсимметрии уравнений движения и представляем выражения для соответсвующего сохраняющегося супертока. В разделе 4 на основании результатов предыдущем разделе мы демонстрируем суперсимметрию исходного действия ПР суперструны. В разделе 5 формулируется заключение.

2 Обзор редукции Полмайера в суперструнных сигма моделях на $AdS_n \times S^n$

В этом разделе, следуя работам [1, 2] [2], мы кратко обрисовываем основные моменты процедуры редукции Полмайера, примененной к суперструнам на $AdS_n \times S^n$ при $n = 2, 3, 5$.

2.1 Суперкосеты

Теории суперструн в формулировке с явной пространственно-временной суперсимметрией естественно описываются как сигма модели WZW-типа в суперкосетном пространстве отображения.

[2] Систематическое применение процедуры редукции Полмайера к бозонным косетным моделям и демонстрация эквивалентности таких ПР систем и определенных массивных gWZW моделей было впервые осуществлено в [14, 15].

Например, $\mathcal{N} = 2$ суперструна Грина-Шварца в $D = 10$ пространстве-времени Минковского может быть сформулирована как сигма модель на суперкосете $\mathcal{P}/\mathcal{L}$ [16], где $\mathcal{P}$ есть $\mathcal{N} = 2$, $D = 10$ супергруппа Пуанкаре, $\mathcal{L}$ есть ее подгруппа Лоренца. Косет $\mathcal{P}/\mathcal{L}$ есть как раз $\mathcal{N} = 2, D = 10$ суперпространство Минковского. Подобное построение может быть обобщено на искривленные суперпространства, в частности на супер $AdS_5 \times S^5$ [17]. Помимо этого максимально-суперсимметричного $D = 10$ суперпространства можно также рассматривать некритические струнные модели на AdS в размерностях, меньших, чем $D = 10$, а именно в суперпространствах с бозонной частью $AdS_n \times S^n$ при $n < 5$. Во всех таких случаях суперструнные модели определяются как $\hat{F}/G$ сигма модели на суперкосетах, где $\hat{F}/G$ есть расширение бозонного косета, являющегося бозонным пространством отображения, на соответствующее суперпространство. А именно, минимальными суперрасширениями бозонных пространств отображения

$$AdS_2 \times S^2 = \frac{SU(1,1) \times SU(2)}{U(1) \times U(1)}\,, \tag{2.3}$$

$$AdS_3 \times S^3 = \frac{SU(1,1) \times SU(1,1) \times SU(2) \times SU(2)}{SU(1,1) \times SU(2)}\,, \tag{2.4}$$

$$AdS_5 \times S^5 = \frac{SU(2,2) \times SU(4)}{SO(1,4) \times SO(5)} \tag{2.5}$$

являются следующие суперкосеты[3]

$$AdS_2 \times S^2 : \qquad \frac{\hat{F}}{G} = \frac{PSU(1,1|2)}{U(1) \times U(1)}\,, \tag{2.6}$$

$$AdS_3 \times S^3 : \qquad \frac{\hat{F}}{G} = \frac{PSU(1,1|2) \times PSU(1,1|2)}{SU(1,1) \times SU(2)}\,, \tag{2.7}$$

$$AdS_5 \times S^5 : \qquad \frac{\hat{F}}{G} = \frac{PSU(2,2|4)}{SO(1,4) \times SO(5)}\,. \tag{2.8}$$

2.2 Связи и фиксации калибровки

Особенностью всех трех случаев $n = 2, 3, 5$ является то, что супералгебра $\hat{f}$ соответствующей супергруппы $\hat{F}$ (или ее комплексной специальной линейной версии) допускает Z_4 градуировку:

$$\hat{f} = \hat{f}_0 \oplus \hat{f}_1 \oplus \hat{f}_2 \oplus \hat{f}_3\,, \tag{2.9}$$

где

$$[\hat{f}_i, \hat{f}_j] \subset \hat{f}_{i+j\,mod\,4}\,. \tag{2.10}$$

Здесь $\hat{f}_0$ есть алгебра бозонной группы G, $\hat{f}_2$ есть ее ортогональное дополнение до полной бозонной подалгебры $\hat{f}$, а подпространства $\hat{f}_{1,3}$ являются фермионными. Токи $J_\pm = F^{-1}\partial_\pm F$, где $F \in \hat{F}$, могут быть разложены в соответсвии с (2.9), как

$$J_\pm = \mathcal{A}_\pm + P_\pm + Q_{1\pm} + Q_{2\pm}\,, \qquad \mathcal{A} \in \hat{f}_0\,, \quad Q_1 \in \hat{f}_1\,, \quad P \in \hat{f}_2\,, \quad Q_2 \in \hat{f}_3\,. \tag{2.11}$$

[3]Напомним, что супегруппа $PSU(m|m)$ есть факторизация $SU(m|m)$ по отщепляющемуся $U(1)$ генератору и потому имеет $2m^2 - 2$ бозонных параметров.

Лагранжиан Грина-Шварца суперструнной сигма модели на $\hat{F}/G$ в конформной калибровке выглядит как

$$L_{GS} = \mathrm{STr}[P_+P_- + \frac{1}{2}(Q_{1+}Q_{2-} - Q_{1-}Q_{2+})]\,. \tag{2.12}$$

Здесь STr обозначает суперслед суперматрицы. Эта формула верна для любого n, подразумевая конкретную специализацию того, что такое токи P, Q в каждом конкретном случае. В такой форме модель включает множество избыточных степеней свободы, как бозонных, так и фермионных. Одним из способов их устранения является процедура ПР, в сочетании с фиксацией калибровочной фермионной κ-симметрии. Такая процедура явно решает связи Вирасоро, при этом оставляя явной $2d$ симметрию Лоренца. Точнее, лагранжиан (2.12) должен быть сопровожден связями Вирасоро

$$\mathrm{STr}(P_+P_+) = 0\,, \quad \mathrm{STr}(P_-P_-) = 0\,. \tag{2.13}$$

Действие Грина-Шварца также инвариантно относительно κ-симметрии. Она может быть частично фиксирована условиями

$$Q_{1-} = 0\,, \qquad Q_{2+} = 0\,. \tag{2.14}$$

Можно частично фиксировать $\hat{f}_0$ калибровочную симметрию лагранжиана (2.12) и разрешить первую связь Вирасоро, положив $P_+ = p_+T$, где $p_+ = p_+(\sigma)$, и T есть фиксированный элемент $\hat{f}_2$. Обычно матрица T выбирается блочно-диагональной с блоками $\frac{i}{2}\Sigma$, где матрица Σ используется для эрмитового сопряжения матриц с сигнатурой Минковского в фундаментальном представлении [4]. Матрица T позволяет расщепить супералгебру $\hat{f}$ как

$$\hat{f} = \hat{f}^{||} \oplus \hat{f}^{\perp}\,, \quad P^{||}\zeta^{||} = \zeta^{||}\,, \quad P^{||}\chi^{\perp} = 0\,, \tag{2.15}$$

где

$$\zeta^{||} \in \hat{f}^{||}, \quad \chi^{\perp} \in \hat{f}^{\perp}\,, \quad P^{||} = -[T,\,[T,\,\cdot\,]]\,, \tag{2.16}$$

и

$$[\hat{f}^{\perp},\,\hat{f}^{\perp}] \subset \hat{f}^{\perp}\,, \quad [\hat{f}^{||},\,\hat{f}^{\perp}] \subset \hat{f}^{||}\,, \quad [\hat{f}^{||},\,\hat{f}^{||}] \subset \hat{f}^{\perp}\,. \tag{2.17}$$

В частности, (2.16) подразумевает, что $T \in \hat{f}_2^{\perp}$. Впоследствии мы будем использовать следующие характерные свойства матрицы T:

$$[T, f^{\perp}] = 0\,, \quad \{T, f^{||}\} = 0\,, \quad T^2 = -\frac{1}{4}\,I\,. \tag{2.18}$$

Используя остаточную конформную инвариантность, можно фиксировать $p^+ = \mu$, где μ есть некоторая константа с размерностью массы. Затем, уравнение движения $\partial_+P_- + [\mathcal{A}_+, P_-] = 0$ и вторая связь Вирасоро в (2.13) могут быть разрешены с помощью $P_- = \mu g^{-1}Tg$, где g есть поле, принимающее значения в группе G. Наконец, используя остаточную κ-симметрию, полностью устраняем нефизические фермионные степени свободы. Оставшиеся динамические фермионные степени свободы описываются полями

$$\Psi_R = \frac{1}{\sqrt{\mu}}Q_{1+}^{||} \in \hat{f}_1^{||}\,, \qquad \Psi_L = \frac{1}{\sqrt{\mu}}(gQ_{2-}g^{-1})^{||} \in \hat{f}_3^{||}\,. \tag{2.19}$$

[4] В случае $n = 3$ имеем $\Sigma = \mathrm{diag}\{1, -1\}$ и в случае $n = 5$ имеем $\Sigma = \mathrm{diag}\{1, 1, -1, -1\}$.

2.3 Редуцированные уравнения и gWZW действие

Обобщенная редукция Полмайера, примененная к уравнениям движения, соответствующим лагранжиану (2.12), окончательно приводит к следующим уравнениям на поля g, $\Psi_{L,R}$ (см. детали в [1, 2]):

$$D_-(g^{-1}D_+g) - F_{+-} = \mu^2[T,\, g^{-1}Tg] + \mu[\Psi_R,\, g^{-1}\Psi_L g]\,, \tag{2.20}$$

$$D_-\Psi_R = \mu[T,\, g^{-1}\Psi_L g]\,, \qquad D_+\Psi_L = \mu[T,\, g\Psi_R g^{-1}]\,, \tag{2.21}$$

где ковариантные производные определены как $D_\pm = \partial_\pm + [A_\pm,\, \cdot\,]$ и напряженность калибровочного поля дается выражением

$$F_{+-} = \partial_+ A_- - \partial_- A_+ + [A_+,\, A_-]\,. \tag{2.22}$$

$2d$ калибровочные поля $A_\pm$ принимают значения в алгебре $\mathtt{h}$ подгруппы H группы G, определенной условием

$$[T,\, h] = 0\,, \quad h \in \mathtt{h}\,, \tag{2.23}$$

причем

$$\mathtt{g} = \hat{f}_0 = \mathtt{m} \oplus \mathtt{h}\,, \quad \mathtt{m} := \hat{f}_0^{||}\,, \;\; \mathtt{h} := \hat{f}_0^{\perp}\,. \tag{2.24}$$

В случае $n = 2$, когда $G = U(1) \times U(1)$, подгруппа H пуста и потому $A_\pm = 0$. В случае $n = 3$, когда $G = SU(1,1) \times SU(2)$, мы имеем $H = U(1) \times U(1)$, а в случае $n = 5$, когда $G = SO(1,4) \times SO(5)$, мы имеем $H = SO(4) \times SO(4) \sim [SU(2)]^4$. Уравнения (2.20), (2.21) являются ковариантными по отношению к калибровочным преобразованиям с параметрами из группы $H \times H$:

$$\begin{aligned} &g \to hg\bar{h}^{-1}\,, \quad \Psi_L \to h\Psi_L h^{-1}\,, \quad \Psi_R \to \bar{h}\Psi_R\bar{h}^{-1}\,, \\ &A_+ \to h(A_+ + \partial_+)h^{-1}\,, \quad A_- \to \bar{h}(A_- + \partial_-)\bar{h}^{-1}\,. \end{aligned} \tag{2.25}$$

В [1, 2] было найдено, что уравнения движения (2.20), (2.21) выводимы из действия

$$\begin{aligned} S_{tot} &= S_{gWZW} + \mu^2 \int d^2\sigma \mathrm{STr}(g^{-1}TgT) \\ &+ \int d^2\sigma \mathrm{STr}(\Psi_L T D_+ \Psi_L + \Psi_R T D_- \Psi_R) + \mu \mathrm{STr}(g\Psi_R g^{-1}\Psi_L)\,, \end{aligned} \tag{2.26}$$

где S_{gWZW} есть действие G/H gWZW модели:

$$\begin{aligned} S_{gWZW} &= S_{WZW} + S_{gauge}\,, \\ S_{WZW} &= \frac{1}{2}\int d^2\sigma \mathrm{STr}\left(g^{-1}\partial_+ g g^{-1}\partial_- g\right) - \frac{1}{6}\int d^3\sigma \varepsilon^{abc}\mathrm{STr}\left(g^{-1}\partial_a g g^{-1}\partial_b g g^{-1}\partial_c g\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$S_{gauge} = \int d^2\sigma \mathrm{STr}(A_+\partial_- g g^{-1} - A_- g^{-1}\partial_+ g - g^{-1}A_+ g A_- + A_+ A_-)\,. \tag{2.28}$$

В выражении (2.27) второй интеграл (член WZ) взят по трехмерному пространству с границей, идентифицированной с $2d$ базовым многообразием [5].

[5]Для краткости, а также следуя [2], мы опускаем множители π, обычно присутствующие в знаменателях коэффициентов.

Действие (2.26) является инвариантным относительно калибровочных преобразований с параметрами в группе H:

$$g \to hgh^{-1}\,, \quad \Psi_{L,R} \to h\Psi_{L,R}h^{-1}\,, \quad A_\pm \to h(A_\pm + \partial_\pm)h^{-1}\,, \tag{2.29}$$

которые образуют диагональную подгруппу $h = \bar{h}$ калибровочной группы $H \times H$ (2.25) на массовой оболочке.

Как следствие лагранжевой формулировки ПР суперструнных уравнений движения (2.20), (2.21), из действия (2.26) теперь также следуют связи, являющиеся алгебраическими уравнениями движения для калибровочных полей $A_\pm$:

$$\textbf{a)}\;\; (g^{-1}D_+g)_{\mathtt{h}} = 2(T\Psi_R^2)_{\mathtt{h}}\,, \quad \textbf{b)}\;\; (gD_-g^{-1})_{\mathtt{h}} = 2(T\Psi_L^2)_{\mathtt{h}}\,. \tag{2.30}$$

Как указано в [1], эти уравнения движения могут быть интерпретированы как определенная фиксация калибровки по отношению к расширенной калибровочной группе на массовой оболочке (2.25). Также можно заметить, что уравнения (2.30), будучи комбинированы с уравнениями (2.20), (2.21), подразумевают, что напряженность $2d$ калибровочного поля исчезает на массовой оболочке:

$$F_{+-} = 0\,. \tag{2.31}$$

Также заметим, что бозонный сектор редуцированной модели описывается gWZW моделью на косете

$$\frac{SO(1,n-1)\times SO(n)}{SO(n-1)\times SO(n-1)}\,,$$

с действием, являющимся суммой действия S_{gWZW} gWZW модели и потенциального члена $\sim \mu^2$, записанного в выражении (2.26). Такая система возникает, как известно, в результате процедуры редукции Полмайера, примененной к бозонной струне на $AdS_n \times S^n$. Этот потенциальный член является матричной записью потенциального члена типа sine-Gordon. Поэтому ясно, что переход от бозонной ПР струны на $AdS_n \times S^n$ к ПР суперструне Грина-Шварца в соответсвующем суперпространстве является фермионным (суперсимметричным) расширением модели sine-Gordon.

2.4 Суперсимметрия на мировой поверхности?

Количество бозонных и фермионных степеней свободы в действии (2.26) надлежащим образом соответствуют друг другу, что наводит на мысль о возможной скрытой суперсимметрии на мировой поверхности в подобном фермионном расширении действия gWZW модели. В самом деле, в [1] было показано, что в случае $n = 2$ действие обладает $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметрией и эквивалентно действию $\mathcal{N} = (2,2)$ модели sine-Gordon [18, 19]. Соответствующие $\mathcal{N} = (2,0)$ преобразования суперсимметрии в этой модели могут быть обобщены на случаи других n как

$$\begin{aligned}
&\delta_{\epsilon_L}\, g = g[T, [\Psi_R,\, \epsilon_L]]\,, \quad \delta_{\epsilon_L}\, \Psi_R = [(g^{-1}D_+g)^{||},\, \epsilon_L]\,, \quad \delta_{\epsilon_L}\, \Psi_L = \mu[T,\, g\epsilon_L g^{-1}]\,,\\
&\delta_{\epsilon_L}\, A_+ = 0\,, \qquad \delta_{\epsilon_L}\, A_- = \mu[(g^{-1}\Psi_L g)^{\perp},\, \epsilon_L]\,,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

где $\epsilon_L \in \hat{f}_1^\perp$ (аналогично для правой суперсимметрии, с параметром $\epsilon_R \in \hat{f}_3^\perp$). Однако, действие (2.26) инвариантно только при жестком условии $[\epsilon_L, h] = 0$, которое выполнено только в случае $n = 2$ [1]. До настоящей работы не был найден способ обойти это ограничение и доказать суперсимметрию на мировой поверхности вне массовой оболочки в случаях $n = 3$ и $n = 5$.

3 Модифицированное массивное gWZW действие и его суперсимметрия

В качестве подхода к решению проблемы суперсимметрии вне массовой оболочки в случаях $n = 3$ и $n = 5$, мы предлагаем выводить ПР суперструнные уравнения (2.20), (2.21) из некоторого модифицированного действия, которое включает модифицированное gWZW действие. Такое модифицированное действие приводит к тем же самым ПР суперструнным полевым уравнениям (2.20), (2.21), и является удобной стартовой площадкой для доказательства $\mathcal{N} = (4, 4)$ суперсимметрии в $n = 3$ модели и $\mathcal{N} = (8, 8)$ суперсимметрии в $n = 5$ модели.

3.1 Альтернативное действие

Далее окажется полезным систематически использовать представление Полякова-Вигмана для калибровочных полей $A_\pm$:

$$A_+ = -\partial_+ u u^{-1}, \qquad A_- = -\partial_- \bar{u} \bar{u}^{-1}, \tag{3.33}$$

где u и $\bar{u}$ есть две независимые матрицы, принимающие значения в группе H. Общие $H \times H$ калибровочные преобразования полей $A_\pm$ (см. (2.25)) воспроизводятся из следующих калибровочных преобразований "препотенциалов" u и $\bar{u}$:

$$u \to hu, \qquad \bar{u} \to \bar{h}\bar{u}. \tag{3.34}$$

Заметим, что значения калибровочных полей в представлении (3.33) остаются неизменными при действии дополнительных правых калибровочных преобразований полей $u, \bar{u}$ с голоморфными и анти-голоморфными параметрами (симметрия Каца-Муди (КМ))

$$u \to u\,\omega(\sigma^-), \qquad \bar{u} \to \bar{u}\,\bar{\omega}(\sigma^+). \tag{3.35}$$

Представление (3.33) хорошо известно, и в контексте ПР суперструны было уже использовано в [1] и [4] с другими целями. Например, в статье [4], посвященной анализу квантовых свойств УФ-конечности ПР суперструны на $AdS_5 \times S^5$, калибровочные поля, входящие в действие (2.26), были представлены как в (3.33), что было использовано для изоляции калибровочных степеней свободы с помощью тождества Полякова-Вигмана для S_{gWZW}. Мы предлагаем воспользоваться выражениями (3.33) с самого начала и рассматривать только u и $\bar{u}$ как исходные калибровочные объекты, как на классическом, так и на квантовом уровнях. Важным следствием является то, что уравнения движения для калибровочных полей становятся второго порядка по производным, в отличие от алгебраических уравнений (2.30) в стандартном подходе. Также как мы увидим, рассмотрение u и $\bar{u}$ в качестве базисных калибровочных сущностей предоставляет дополнительные возможности для выявления новых симметрий действия, как модифицированного, рассматриваемого в этом разделе, так и исходного, рассматриваемого в следующем разделе.

Перейдем к изложению наших соображений. Мы предлагаем рассмотреть следующее модифицированное действие ПР суперструны:

$$S_{tot} \to S'_{tot} = S_{tot} + S_a \,, \tag{3.36}$$

где S_{tot} есть стандартное действие (2.26) (с калибровочными полями, представленными как указано в (3.33)), а

$$S_a = S^{(H)}_{WZW}(B) \tag{3.37}$$

есть WZW действие для поля $B = u^{-1}\bar{u}$, принимающего значения в группе H. Поле B явно инвариантно относительно диагональной $h = \bar{h}$ подгруппы группы калибровочных преобразований (3.34), так что действие (3.37) и новое полное действие S'_{tot} также калибровочно-инвариантны.

Уравнения движения для полей $g\,, \Psi_{L,R}$, (2.20) и (2.21), *остаются неизменными* при модификации (3.36), которая оказывает влияние только на уравнения движения для калибровочных полей u, $\bar{u}$. Это важно, ибо процедура редукции Полмайера, сама по себе, приводит только к уравнениям (2.20) и (2.21). Появление дополнительных уравнений на калибровочные поля есть "плата" за возможность выводить уравнения (2.20), (2.21) из действия вне массовой оболочки, и, для действия (2.26), эти уравнения (т.е. (2.30)) могут быть интерпретированы как частичная фиксация $H \times H$ калибровочной свободы ПР суперструнных уравнений (2.20), (2.21).

Уравнения движения для калибровочных полей, соответствующие действию S'_{tot}, отличаются от (2.30). Используя общую формулу для вариации действия S_a:

$$\delta S_a = -\int d^2\sigma \mathrm{STr}(B^{-1}\delta B \partial_-(B^{-1}\partial_+ B)) = \int d^2\sigma \mathrm{STr}\left(\delta\bar{u}\bar{u}^{-1}\, F_{+-} - \delta u u^{-1}\, F_{+-}\right), \tag{3.38}$$

и тождества

$$\delta A_+ = -D_+(\delta u u^{-1})\,, \qquad \delta A_- = -D_-(\delta\bar{u}\bar{u}^{-1})\,, \tag{3.39}$$

мы выводим

$$\textbf{a)}\;\; D_-\left(g^{-1}D_+ g - 2T\Psi_R^2\right)_{\mathtt{h}} - F_{+-} = 0\,, \quad \textbf{b)}\;\; D_+\left(D_- g g^{-1} + 2T\Psi_L^2\right)_{\mathtt{h}} - F_{+-} = 0\,. \tag{3.40}$$

Используя фермионные уравнения (2.21) и (3.40) и сравнивая результат с уравнением (2.20), мы видим, что уравнения (3.40) есть просто две эквивалентные формы записи $\mathtt{h}$ проекции уравнения (2.20). Таким образом, в данном случае уравнения движения для калибровочных полей просто тождественно удовлетворяются как следствие ПР суперструнных уравнений (2.20), (2.21). Никакие другие связи на калибровочные поля не возникают. Заметим, что при любом другом выборе коэффициента перед действием S_a в (3.36) эти свойства были бы утеряны, хотя уравнения движения для полей g, Ψ_L, Ψ_R остались бы теми же самыми [6]. Как мы увидим, суперсимметрия действия S'_{tot} также возникает при данном значении коэффициента.

[6]В таком случае, например, уравнения движения для калибровочных полей привели бы к уравнению $F_{+-} = 0$.

Причина, по которой комбинация

$$S'_{gWZW} = S_{gWZW} + S_a \tag{3.41}$$

отличается от других возможных комбинаций этих двух действий, становится ясной после использования известного следствия тождества Полякова-Вигмана [13]

$$S_{gWZW}(g,u,\bar u) = S_{WZW}(u^{-1}g\bar u) - S^{(H)}_{WZW}(u^{-1}\bar u)\,, \tag{3.42}$$

где

$$S'_{gWZW}(g,u,\bar u) = S_{WZW}(u^{-1}g\bar u)\,. \tag{3.43}$$

Используя выражение (3.43) и свойство $[T,h]=0$, легко показать, что действие S'_{tot} инвариантно не только относительно диагональной калибровочной H подгруппы (2.29) (как это имеет место для S_{tot}), но и относительно полной калибровочной $H\times H$ группы (2.25) которая теперь определяет калибровочные преобразования симметрии *вне массовой оболочки*[7]. Новое действие также инвариантно относительно (анти)голоморфных правых сдвигов КМ (3.35).

Для дальнейших целей мы определяем "теневые" калибровочные поля $\tilde A_\pm$:

$$\tilde A_+ = -\partial_+\bar u\bar u^{-1}\,, \quad \tilde A_- = -\partial_- u u^{-1}\,. \tag{3.44}$$

Они удовлетворяют смешанным условиям нулевой напряженности

$$\begin{aligned}
\tilde F_{+-} &= \partial_+\tilde A_- - \partial_- A_+ + [A_+,\tilde A_-] = D_+\tilde A_- - \partial_- A_+ = 0\,,\\
\tilde F_{-+} &= \partial_-\tilde A_+ - \partial_+ A_- + [A_-,\tilde A_+] = D_-\tilde A_+ - \partial_+ A_- = 0\,,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

и обладают "твистованными" законами преобразования относительно калибровочной $H\times H$ группы (3.34):

$$\tilde A_+ \to \bar h(\tilde A_+ + \partial_+)\bar h^{-1}\,, \quad \tilde A_- \to h(\tilde A_- + \partial_-)h^{-1}\,. \tag{3.46}$$

Условия (3.45) выполняются вне массовой оболочки и на самом деле могут рассматриваться как определения теневых калибровочных полей. Заметим, что поля $\tilde A_\pm$ преобразуются при действии (анти)голоморфных преобразований КМ (3.35), но смешанные тензора напряженности $\tilde F_{+-}, \tilde F_{-+}$ инвариантны по отношению к этим преобразованиям в силу свойств $D_\pm \tilde A'_\mp = D_\pm \tilde A_\mp$.

Для последующего нам понадобится удобное выражение для полных вариаций действия S'_{tot} при общих вариациях δu и $\delta\bar u$:

$$\delta_u S'_{tot} = \int d^2\sigma\,\mathrm{STr}\left[\delta u u^{-1}\, D_+\left(\partial_- g g^{-1} - gA_-g^{-1} + \tilde A_- + 2T\Psi_L^2\right)_{\mathtt{h}}\right], \tag{3.47}$$

$$\delta_{\bar u} S'_{tot} = -\int d^2\sigma\,\mathrm{STr}\left[\delta\bar u\bar u^{-1}\, D_-\left(g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g - \tilde A_+ - 2T\Psi_R^2\right)_{\mathtt{h}}\right]. \tag{3.48}$$

Вариация дополнительного члена действия S_a может быть также представлена в похожей в форме:

$$\delta S_a = \int d^2\sigma\mathrm{STr}\left[\delta u u^{-1}\, D_+(\tilde A_- - A_-) + \delta\bar u\bar u^{-1}\, D_-(\tilde A_+ - A_+)\right]. \tag{3.49}$$

[7] Конечно эта расширенная калибровочная симметрия редуцируется к своей диагональной подгруппе при любом другом значении коэффициента перед действием S_a в (3.36).

3.2 Суперсимметрия вне массовой оболочки

В качестве прототипа преобразований суперсимметрии вне массовой оболочки для ПР суперструнного действия мы берем преобразования (2.32). Как уже было замечено, они представляют формальные симметрии действия (2.26) при условии того, что равенство $[\epsilon_L,\, h] = 0$ удовлетворено, и главная проблема состоит в том, что это условие слишком сильно, будучи достижимым только в случае $n = 2$. Оказывается, что в рамках формулировки, описанной в предыдущем разделе, мы можем опустить это ограничение, модифицируя преобразования (2.32) как

$$\delta_{\epsilon_L}\, g = g[T, [\Psi_R,\, \tilde\epsilon_L]]\,, \quad \delta_{\epsilon_L}\, \Psi_R = [(g^{-1}D_+g)^{||},\, \tilde\epsilon_L]\,, \quad \delta_{\epsilon_L}\, \Psi_L = \mu[T,\, g\tilde\epsilon_L g^{-1}]\,, \tag{3.50}$$

$$\delta_{\epsilon_L}\, A_+ = 0\,, \qquad \delta_{\epsilon_L}\, A_- = \mu[(g^{-1}\Psi_L g)^{\perp},\, \tilde\epsilon_L]\,, \tag{3.51}$$

где [8]

$$\tilde\epsilon_L = \bar u \epsilon_L \bar u^{-1}\,. \tag{3.52}$$

Чтобы показать, что действие S'_{tot} на самом деле инвариантно, мы начнем с рассмотрения безмассового $\mu = 0$ случая. В этом случае вариация S'_{tot} совпадает с вариацией S_{tot}, ибо калибровочные поля, и потому добавка к действию S_a, остаются неизменными. Ключевую роль в проверке инвариантности играет соотношение

$$D_-\tilde\epsilon_L = 0\,, \tag{3.53}$$

и необходимость в наложении дополнительной связи $[\epsilon_L,\, h] = 0$ больше не возникает.

В качестве второго шага, будем варьировать массивное действие S_{tot}, все еще предполагая, что $\delta A_- = 0$. Опять же, эта вариация равна вариации модифицированного действия S'_{tot} и, с точностью до $2d$ интегрируемой полной производной, оказывается равной:

$$\mu \int d^2\sigma \mathrm{STr}\left(g^{-1}\Psi_L g\left[\tilde\epsilon_L,\, (g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g - \tilde A_+ - 2T\Psi_R^2)_{\mathtt{h}}\right]\right). \tag{3.54}$$

Далее, вспоминая общую формулу (3.48) для вариации полного модифицированного действия S'_{tot} по отношению к $\delta\bar u$ и тождество $\delta A_- = -D_-(\delta\bar u \bar u^{-1})$ (см. (3.39)), мы обнаруживаем, что вариация (3.54) в точности сокращается вкладом, приходящим из вариации поля A_- в соответствии с (3.51).

Решающую роль в этом сокращении играет присутствующий в нашем рассмотрении дополнительный кусок действия S_a в полном предложенном действии S'_{tot}, что отличает последнее от исходного стандартного действия S_{tot}. Без этого члена вариация действия при варьировании калибровочных поле δA_- дается выражением

$$\delta(S'_{tot} - S_a) = -\mu \int d^2\sigma\, \mathrm{STr}\left(g^{-1}\Psi_L g\left[\tilde\epsilon_L,\, (g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g - A_+ - 2T\Psi_R^2)_{\mathtt{h}}\right]\right). \tag{3.55}$$

Такое преобразование только частично сокращает вариацию (3.54), и для полного исчезновения вариации действия оказывается необходимым наложить условие $[\epsilon_L\,, h] = 0$. Такое

[8] Матрица $\epsilon_L \in \hat f_1^{\perp}$ включает $2(n-1)$ независимых параметров для $AdS_n \times S^n$ модели. Преобразования право-киральнной суперсимметрии могут быть записаны аналогичным образом с помощью матричного параметра $\tilde\epsilon_R = u\epsilon_R u^{-1}$ с тем же количеством независимых компонент.

ограничение оказывается ненужным если член S_a добавлен к действию. Впоследствии мы переформулируем полученные результаты в форме, удобной для нахождения суперсимметрии исходного действия S_{tot}.

Стоит заметить, что локальные преобразования (3.51) калибровочного потенциала A_- приводят к нелокальным преобразованиям препотенциала $\bar{u}$. Последние получаются как решение уравнения

$$D_-(\delta\bar{u}\bar{u}^{-1}) = \mu[\tilde{\epsilon}_L,\, (g^{-1}\Psi_L g)^{\perp}] \quad \Rightarrow \quad \bar{u}^{-1}\delta\bar{u} = \mu\,(\partial_-)^{-1}\,\left(\bar{u}^{-1}[\tilde{\epsilon}_L,\, (g^{-1}\Psi_L g)^{\perp}]\bar{u}\right). \tag{3.56}$$

При этом голоморфная функция $f(\sigma^+)$ (нулевая мода) со значениями в $\mathtt{h}$, возникающая как константа интегрирования решения (3.56), может быть поглощена преобразованиями типа КМ (3.35) поля $\bar{u}$.

Рассмотрение в этом разделе применимо для обоих $n = 3$ и $n = 5$ случаев. Отличие от $n = 2$ случая состоит в том, что теперь имеются калибровочные поля и препотенциалы, нетривиальное преобразование которых обеспечивает суперинвариантность действия. В принципе, матричный препотенциал $\bar{u}$, который появляется в (3.50), (3.51) через одевающие соотношения (3.52), может быть нелокально выражен через A_- (с точностью до голоморфных правых преобразований КМ):

$$(\partial_- + A_-)\bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = P\exp\{-\int^{\sigma^-} d\sigma^{-\prime} A_-(\sigma^{-\prime}, \sigma^+)\}\,\bar{\omega}(\sigma^+)\,.$$

То же самое касается препотенциала u, который присутствует в право-киральных преобразованиях суперсимметрии: он может быть выражен через калибровочное поле A_+. Так что преобразования (3.50), (3.51) и (3.56), так же как и соответствующие право-киральные преобразования, могут быть полностью выражены в терминах объектов, на самом деле входящих в ПР суперструнные уравнения (2.20) и (2.21), т.е. в терминах $2d$ полей g, Ψ_L, Ψ_R и $A_\pm$.

Заметим, что эти преобразования упрощаются в калибровке

$$\bar{u} = u = I\,. \tag{3.57}$$

В этой калибровке $A_\pm = 0$, и все преобразования суперсимметрии приобретают дополнительные члены, соответствующие $H \times H$ преобразованиям, необходимым для сохранения калибровки (3.57). В частности, ϵ_L преобразования записываются как

$$\begin{aligned} &\delta_{\epsilon_L} g = g([T, [\Psi_R,\, \epsilon_L]] + \hat{\delta}\bar{h})\,, \quad \delta_{\epsilon_L} \Psi_R = [(g^{-1}\partial_+ g)^{||},\, \epsilon_L] + [\Psi_R,\, \hat{\delta}\bar{h}]\,, \\ &\delta_{\epsilon_L} \Psi_L = \mu[T,\, g\epsilon_L g^{-1}]\,, \quad \delta A_\pm = 0\,, \end{aligned} \tag{3.58}$$

где $\hat{\delta}\bar{h} = \mu(\partial_-)^{-1}\,[\epsilon_L, (g^{-1}\Psi_L g)^{\perp}]$. Таким образом, нелокальность сохраняется также и в калибровке (3.57).

Преобразования суперсимметрии, записанные в форме (3.58), оказываются крайне полезными для доказательства суперсимметрии исходного действия S_{tot} ПР суперструны. Мы явно показываем это в следующем разделе.

3.3 Суперсимметрия на массовой оболочке

Перейдем теперь к изучению того, как преобразования суперсимметрии действия S'_{tot} вне массовой оболочки проявляют себя в соответствующих уравнениях движения. Как мы знаем, это просто уравнения движения ПР суперструны (2.20) и (2.21).

Довольно тривиально проверить, что при преобразованиях (3.50) и (3.51) эти уравнения преобразуются следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\delta\left(D_+\Psi_L - \mu[T,\, g\Psi_R g^{-1}]\right) = 2\mu T\left(g[\mathcal{O}_+,\, \tilde{\epsilon}]g^{-1}\right)^{||}\,,\\
&\delta\left(D_-\Psi_R - \mu[T,\, g^{-1}\Psi_L g]\right) = 0\,,\\
&\delta\left(D_-(g^{-1}D_+g) - F_{+-} - \mu^2[T,\, g^{-1}Tg] - \mu[\Psi_R,\, g^{-1}\Psi_L g]\right) = \mu[g^{-1}\Psi_L g,\, [\tilde{\epsilon},\, \mathcal{O}_+]],
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

где

$$
\mathcal{O}_+ = (g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g - 2T\Psi_R^2 - \tilde{A}_+)_{\mathtt{h}}\,. \tag{3.60}
$$

Мы наблюдаем интересное отклонение от того, что обычно ожидается по аналогии со стандартными суперсимметричными теориями: в то время как действие S'_{tot} инвариантно по отношению к преобразованиям (3.50), (3.51) и (3.56), уравнения движения - нет, их вариация включает неисчезающий объект $\mathcal{O}_+$. Это может быть связано с тем фактом, что фундаментальные объекты, входящие в действие, препотенциалы $\bar{u}$ (или u в случае право-киральной суперсимметрии), подвергаются нелокальному преобразованию (3.56).

Тем не менее оказывается, что уравнения движения могут быть сделаны инвариантными при условии небольшой модификации преобразований (3.50), (3.51) и (3.56) на массовой оболочке. Во-первых заметим, что имеет место соотношение

$$
D_-\mathcal{O}_+ = 0\,, \tag{3.61}
$$

которое удовлетворяется как $\mathtt{h}$ проекция бозонного уравнения (2.20), принимая во внимание фермионное уравнение (2.21). Тогда ток $\tilde{\mathcal{O}}_+ = \bar{u}^{-1}\mathcal{O}_+\bar{u}$ удовлетворяет закону сохранения

$$
\partial_-\tilde{\mathcal{O}}_+ = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{\mathcal{O}}_+ = \lambda(\sigma^+)\,,\; \mathcal{O}_+ = \bar{u}\,\lambda(\sigma^+)\,\bar{u}^{-1}\,. \tag{3.62}
$$

Основываясь на этом представлении, перевыразим $\tilde{\mathcal{O}}_+$ на массовой оболочке через голоморфную матрицу $\hat{\bar{\omega}}(\sigma^+)$ со значениями в группе H как

$$
\tilde{\mathcal{O}}_+ = \hat{\bar{\omega}}\,\partial_+\,\hat{\bar{\omega}}^{-1}\,. \tag{3.63}
$$

Из этого соотношения $\hat{\bar{\omega}}$ может быть нелокально выражена через $\tilde{\mathcal{O}}_+$ и, следовательно, через динамические поля g, Ψ_R и $\bar{u}$. В качестве последнего шага мы модифицируем преобразования (3.50), (3.51) и (3.56), заменяя

$$
\epsilon_L \;\Rightarrow\; \hat{\bar{\omega}}\,\epsilon_L\,\hat{\bar{\omega}}^{-1}\,. \tag{3.64}
$$

Далее, используя (3.63), легко проверить, что полный набор уравнений (2.20) и (2.21) инвариантен относительно таких модифицированных преобразований на массовой оболочке.

Ток $\tilde{\mathcal{O}}_+$ инвариантен относительно калибровочных $H \times H$ преобразований, но ведет себя как калибровочная связность по отношению к голоморфным преобразованиям КМ (3.35):

$$
\tilde{\mathcal{O}}_+ \quad\to\quad \bar{\omega}^{-1}\,(\tilde{\mathcal{O}}_+ + \partial_+)\bar{\omega}\,, \tag{3.65}
$$

или, в терминах препотенциала $\hat{\bar{\omega}}$,

$$\hat{\bar{\omega}} \quad \to \quad \bar{\omega}^{-1}\,\hat{\bar{\omega}}\,. \tag{3.66}$$

Следовательно, на массовой оболочке можно выбрать калибровку

$$\hat{\bar{\omega}} = I \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathcal{O}}_+ = \mathcal{O}_+ = 0\,. \tag{3.67}$$

Легко также проверить что в выбранной калибровке ток $\tilde{\mathcal{O}}_+$ преобразуется при действии суперсимметрии как

$$\delta\tilde{\mathcal{O}}_+ = \bar{u}^{-1}\left(2T[\tilde{\epsilon}_L,\,\{(g^{-1}D_+g)^{||},\Psi_R\}] + \mu\tilde{D}_+\left(\bar{u}\,(\partial_-)^{-1}\left(\bar{u}^{-1}[\tilde{\epsilon}_L,\,(g^{-1}\Psi_L g)^{\perp}]\bar{u}\right)\,\bar{u}^{-1}\right)\right)\bar{u} \tag{3.68}$$

где $\tilde{D}_+ = \partial_+ + [\tilde{A}_+,.]$. Можно также проверить, что $\partial_-\delta\tilde{\mathcal{O}}_+ = 0$ как следствие уравнений (2.20), (2.21) и калибровочного условия (3.67). Далее, чтобы сохранить калибровку (3.67), следует сопровождать преобразования суперсимметрии некоторыми зависящими от полей преобразованиями КМ. Очевидно, (2.20) и (2.21) инвариантны относительно таких преобразований, ибо они инвариантны относительно любых преобразований КМ.

3.4 Сохраняющийся суперток и динамические степени свободы

Характерным свойством суперсимметричных систем является существование сохраняющегося супертока, с помощью которого можно построить соответствующие нетеровские суперзаряды.

Чтобы найти суперток в рассматриваемой теории, мы применяем стандартную процедуру: варьируем S'_{tot} при действии группы вариаций (3.50), (3.51), (3.56), в которой осуществлена локализация параметров преобразований $\epsilon_L \to \epsilon_L(\sigma^+,\sigma^-)$. Тогда компоненты супертока могут быть найдены из выражения

$$\delta S_{tot} = \int d^2\sigma(\partial_+\epsilon_L J_- + \partial_-\epsilon_L J_+)\,. \tag{3.69}$$

В явном виде,

$$\begin{aligned} J_+ &= \bar{u}^{-1}[(g^{-1}D_+g)^{||},\,[T,\,\Psi_R]]\bar{u} + \mu[\partial_-^{-1}(\bar{u}^{-1}(g^{-1}\Psi_L g)^{\perp}\bar{u}),\tilde{\mathcal{O}}_+]\,, \\ J_- &= -\mu\bar{u}^{-1}(g^{-1}\Psi_L g)^{\perp}\bar{u}\,. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Можно напрямую проверить, что когда уравнения движения (2.20) and (2.21) удовлетворены, суперток подчиняется стандартному закону сохранения

$$\partial_+J_- + \partial_-J_+ = 0\,. \tag{3.71}$$

Стоит заметить, что нелокальная часть в выражении для J_+ исчезает при выборе калибровки на массовой оболочке (3.67). Аналогичный сохраняющийся суперток может быть выведен, исходя из преобразований суперсимметрии с параметром ϵ_R.

Мы завершаем этот раздел несколькими комментариями касательно динамических степеней свободы на массовой оболочке. Постольку, поскольку уравнения движения, следующие из действия S'_{tot}, являются ни чем иным как ПР формой $AdS_n \times S^n$ суперструнных уравнений движения, без каких-дибо дополнительных ограничений на калибровочные поля, все аргументы работы [1] применимы также к данному случаю. В частности, $H \times H$ калибровочная свобода этих уравнений может быть зафиксирована так, чтобы удовлетворить связям (2.30) на калибровочные поля, рассматриваемым как частный выбор калибровки, с диагональной подгруппой $h = \bar{h}$, параметризующей остаточную калибровочную симметрию. Далее, остаточная калибровочная симметрия может быть использована для того, чтобы сократить число независимых степеней свободы поля g до $(\dim G - \dim H)$, в то время как (2.30) используются для устранения калибровочных степеней свободы $A_\pm$ путем выражения этих полей через физические бозонные и фермионные поля. В результате на массовой оболочке мы остаемся с “бозонным + фермионным” полевыми составами $(2+2)$, $(4+4)$ и $(8+8)$ в случаях $n=2$, $n=3$ и $n=5$ моделях, соответственно.

Препотенциальное представление (3.33) для калибровочных полей предоставляет альтернативные пути достижения тех же выводов. Можно выбрать калибровку (3.57), что достижимо как вне, так и на массовой оболочке. Соответствующая остаточная калибровочная группа состоит из $H \times H$ калибровочных преобразований специальной формы

$$h = \omega^{-1}(\sigma^-)\,, \quad \bar{h} = \bar{\omega}^{-1}(\sigma^+)\,, \tag{3.72}$$

где мы воспользовались тем фактом, что на общих u и $\bar{u}$ реализованы как $H \times H$ калибровочные преобразования (3.34), так и (анти)голоморфные преобразования КМ (3.35). В этой калибровке $\mathtt{h}$-проекция уравнения (2.20), с учетом уравнения (2.21), записывается как

$$\partial_-(g^{-1}\partial_+ g - 2T\Psi_R^2)_{\mathtt{h}} = 0\,, \quad \partial_+(\partial_- g g^{-1} + 2T\Psi_L^2)_{\mathtt{h}} = 0\,. \tag{3.73}$$

Постольку поскольку выражения в круглых скобках являются независимыми, соответственно, от σ^- и σ^+, остаточная калибровочная свобода (3.72) позволяет наложить следующую калибровку на массовой поверхности:

$$(g^{-1}\partial_+ g - 2T\Psi_R^2)_{\mathtt{h}} = 0\,, \quad (\partial_- g g^{-1} + 2T\Psi_L^2)_{\mathtt{h}} = 0\,. \tag{3.74}$$

В результате, H-групповые степени свободы поля g оказываются устраненными.

Существует другая форма калибровки на массовой поверхности (3.74), такая, что $H \times H$ калибровочная инвариантность теории все еще сохраняется:

$$\mathcal{O}_+ = \mathcal{O}_- = 0\,, \tag{3.75}$$

где $\mathcal{O}_+$ определено в (3.60), а $\mathcal{O}_-$ есть соответствующий право-киральный объект:

$$\mathcal{O}_- = \Big(\partial_- g g^{-1} - gA_- g^{-1} + \tilde{A}_- + 2T\Psi_L^2\Big)_{\mathtt{h}}\,. \tag{3.76}$$

В калибровке (3.57), мы воспроизводим (3.74).

3.5 Замыкание

Приступим к изучению замыкания преобразований суперсимметрии на массовой оболочке. Во-первых, мы можем воспользоваться $H \times H$ калибровочной симметрией и выбрать калибровку (3.57), после чего рассматривать преобразования (3.58) в выбранной калибровке. Прямое вычисление скобки Ли на полях g, Ψ_L и Ψ_R дает, с точностью до некоторых дополнительных членов, описывающих (калибровочные) преобразования, трансляционные члены, умноженные на один и тот же матричный параметр:

$$\begin{aligned}
(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\, g &= 4\partial_+ g T(\epsilon_{L(2)}\epsilon_{L(1)} - \epsilon_{L(1)}\epsilon_{L(2)}) + \cdots\,, \\
(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\, \Psi_R &= 4\partial_+ \Psi_R T(\epsilon_{L(2)}\epsilon_{L(1)} - \epsilon_{L(1)}\epsilon_{L(2)}) + \cdots\,, \\
(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\, \Psi_L &= 4\partial_+ \Psi_L T(\epsilon_{L(2)}\epsilon_{L(1)} - \epsilon_{L(1)}\epsilon_{L(2)}) + \cdots\,.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Теперь, нашей целью является выделение “настоящего” трансляционного члена, с c-числовым скобочным параметром. Поэтому мы должны принять во внимание детальную структуру матричного параметра суперсимметрии ϵ_L. Мы ослабляем сильное калибровочное условие (3.57) и далее переходим к изучению скобок без фиксации калибровки. Матрица ϵ_L однозначно определяется условием $\epsilon_L \in \hat{f}_1^{\perp}$, подразумевающим $[\epsilon_L, T] = 0\,$. Имеем

$$\epsilon_L = \begin{pmatrix} 0 & E \\ iE^\dagger\Sigma & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.78}$$

и, следовательно, получаем следующее выражение для матричного скобочного параметра:

$$\epsilon_{L(2)}\epsilon_{L(1)} - \epsilon_{L(1)}\epsilon_{L(2)} = 2\begin{pmatrix} E_{(2)}E^\dagger_{(1)} - E_{(1)}E^\dagger_{(2)} & 0 \\ 0 & E^\dagger_{(2)}E_{(1)} - E^\dagger_{(1)}E_{(2)} \end{pmatrix} T\,. \tag{3.79}$$

Рассмотрим <u>$n = 3$ модель</u>. Наиболее общая форма матрицы E в (3.78) определяется вышеупомянутыми условиями на ϵ_L следующим образом:

$$E^1 = \eta^1 I_2\,, \quad \text{или} \quad E^2 = \eta^2\Sigma\,, \tag{3.80}$$

где η^1 и η^2 есть комплексные грассмановы параметры, и I_2 есть единичная 2×2 матрица. Тогда, для каждого из блоков $E^i\,, i = 1, 2\,$, мы получаем (нет суммирования по i)

$$E^i_{(2)}E^{i\dagger}_{(1)} - E^i_{(1)}E^{i\dagger}_{(2)} = E^{i\dagger}_{(2)}E^i_{(1)} - E^{i\dagger}_{(1)}E^i_{(2)} = a_i^+ I_2\,, \tag{3.81}$$

где мы определили два скобочных трансляционных параметра как

$$a_i^+ = \eta^i_{(2)}\eta^{i\dagger}_{(1)} - \eta^i_{(1)}\eta^{i\dagger}_{(2)}\,. \tag{3.82}$$

Рассмотрим <u>$n = 5$ модель</u>. В этом случае матрица E в (3.78) может быть параметризована следующим образом:

$$E = \begin{pmatrix} \tilde{E} & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{pmatrix}, \tag{3.83}$$

где

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^\dagger \end{pmatrix}, \ \text{или} \ \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ -\eta^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & -\eta^\dagger \end{pmatrix}, \ \text{или} \ \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.84}$$

Мы можем образовать четыре возможные комбинации этих блоков, чтобы построить матрицу E в (3.83). Легко заметить, что в для каждой из таких комбинаций мы снова получаем соотношение (3.81), теперь для четырех различных комплексных параметров суперсимметрии η^i , $i = 1, \ldots 4$. Соответственно, мы получаем четыре различных трансляционных параметра вида (3.82).

Теперь, когда соотношение (3.81) удовлетворено, мы получаем[9]

$$\epsilon_{L(2)}\epsilon_{L(1)} - \epsilon_{L(1)}\epsilon_{L(2)} = 2a_i^+ T\,. \tag{3.85}$$

Возвращаясь к калибровке (3.57), мы замечаем, что (3.85) подразумевает присутствие стандартных a_i^+-трансляционных членов в скобках Ли (3.77).

Удобно выбрать калибровку (3.75) на массовой поверхности, вместо избыточно ограничивающей калибровки (3.57). Тогда, для каждой пары η^i-параметризованных преобразований суперсимметрии мы получаем следующие точные $(4,0)$ $((8,0))$ скобки Ли между η и $\eta^\dagger$ преобразованиями (для краткости, мы опускаем индекс i у a_i^+):

$$\begin{aligned}
(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\, g &= -2a^+\partial_+ g - 2a^+ A_+\, g + g(2a^+ A_+ + \tilde{Q})\,, \\
(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\, \Psi_R &= -2a^+\partial_+\Psi_R + [\Psi_R,\, 2a^+ A_+ + \tilde{Q}]\,, \\
(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\, \Psi_L &= -2a^+\partial_+\Psi_L - [2a^+ A_+,\, \Psi_L]\,, \\
(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\, A_- &= -2a^+\partial_+ A_- + D_-(2a^+ A_+ + \tilde{Q})\,, \\
(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)\, A_+ &= -2a^+\partial_+ A_+ + D_+(2a^+ A_+) = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Здесь $\tilde{Q} = Q + 2a^+(\tilde{A}_+ - A_+)$, а Q есть некая матрица со значениями в алгебре $\mathtt{h}$. Структура замыкания в рассматриваемом секторе прозрачна: оно представляет собой сумму $2d$ σ^+ трансляций и компенсирующих зависящих от полей $H \times H$ калибровочных преобразований, с параметрами $-(2a^+ A_+)$ и $-(2a^+ A_+ + \tilde{Q})$, соответственно. Оно имеет единую форму для всех участвующих полей, как и должно быть. Вычисляя эти скобки, мы воспользовались, помимо калибровки на массовой поверхности (3.75), также уравнениями движения для полей $\Psi_{L,R}$.

4 Суперсимметрия исходного действия

Все еще используя представление Полякова-Вигмана для калибровочных полей, можно воспользоваться полученными результатами, чтобы продемонстрировать суперсимметрию исходного действия. Заметим, что выбор калибровки (3.57) в действии S_{tot} может быть эквивалентно интерпретирован как замена переменных [4]:

$$g = u\tilde{g}\bar{u}^{-1}, \quad \Psi_L = u\tilde{\Psi}_L u^{-1}\,, \quad \Psi_R = \bar{u}\tilde{\Psi}_R\bar{u}^{-1}\,, \tag{4.87}$$

[9]В силу тождества $[T, \mathtt{h}] = 0$, мы можем заменить $\epsilon_L \;\rightarrow\; \tilde{\epsilon}_L$ in (3.85) без появления зависимости от полей в выражении для a_i^+. Это свойство должно быть учтено при изучении скобки Ли без наложения калибровочного условия (3.57).

где u и $\bar{u}$ не предполагаются равными **1**. Тогда, преобразования (3.58), со всеми переменными, замененными на таковые с тильдами, очевидно оставляют инвариантным S_{tot} и S_a в S'_{tot} по-отдельности, ибо калибровочные степени свободы u и $\bar{u}$, и, следовательно, дополнительный член $S_a(u^{-1}\bar{u})$ не преобразуются вовсе. Тогда, возвращаясь к исходным переменным в S_{tot}, можно легко проверить, что нелокальные преобразования суперсимметри, оставляющие действие S_{tot} инвариантным, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &\delta_{\epsilon_L} g = g([T,[\Psi_R,\,\tilde{\epsilon}_L]] + \hat{\delta}\bar{h})\,, \quad \delta_{\epsilon_L}\Psi_R = [(g^{-1}D_+g)^{||},\,\tilde{\epsilon}_L] + [\Psi_R,\,\hat{\delta}\bar{h}]\,, \\ &\delta_{\epsilon_L}\Psi_L = \mu[T,\,g\tilde{\epsilon}_L g^{-1}]\,, \quad \delta A_\pm = 0\,, \end{aligned} \tag{4.88}$$

где теперь $\hat{\delta}\bar{h} = \mu(D_-)^{-1}\,[\tilde{\epsilon}_L,(g^{-1}\Psi_L g)^{\perp}]\,.$

5 Заключение

В данном исследовании, используя модифицированное действие gWZW типа, была показана $2d$ суперсимметрия ПР суперструнного действия на $AdS_n \times S^n$, а именно $\mathcal{N}=(4,4)$ и $\mathcal{N}=(8,8)$ киральные суперсимметрии таких систем в случаях $n=3$ и $n=5$, соответсвенно [10]. Мы получили явную форму преобразований суперсимметрии, как вне массовой оболочки на уровне действия, так и на массовой оболочке на уровне уравнений движения (т.е. уравнений движения ПР суперструны). Эти преобразования существенно содержат нелокальные члены калибровочных преобразований, возникающие как результат представления Полякова-Вигмана для $2d$ калибровочных полей в gWZW действии. По модулю возможных, зависящих от полей, “центральных зарядов” в перекрестных скобках Ли, найденные суперсимметрии содержат две (в случае $n=3$) и четыре (в случае $n=5$) независимые $\mathcal{N}=(2,2)$ подгруппы Пуанкаре со стандартным замыканием на массовой оболочке на трансляции на мировой поверхности (сопровождаемые зависящими от полей калибровочными преобразованиями).

Тип расширенной $2d$ суперсимметрии, найденной в данных системах, нам пока не вполне ясен. Очевидно, что для того, чтобы классифицировать найденную суперсимметрию, нам нужно сформулировать рассматриваемые модели полностью вне массовой оболочки, т.е. вводя вспомогательные поля (и добившись равенства числа бозонных и фермионных степеней свободы вне массовой оболочки) и переходя к суперполевому описанию. С учетом того, что в найденных преобразованиях суперсимметрии существенно присутствуют нелокальности, маловероятно, что рассматриваемые модели подобны хорошо известным супер-расширениям WZW моделей. Например, $\mathcal{N}=(4,4)$ WZW модели могут быть естественно описаны в терминах “твистованных-киральных” $\mathcal{N}=(4,4)$ супермультиплетов [21, 22] с $(8+8)$ полевым составом вне массовой оболочки, в котором 4 бозонных поля являются вспомогательными. Вполне естественно анализировать рассмотренные системы в подходе гармонического суперпространства [23], или в его би-гармоническом обобщении [24], применимым только для $\mathcal{N}=(4,4), 2d$ систем.

[10]Гипотеза о том, что $AdS_3 \times S^3$ ПР суперструна может обладать скрытой $\mathcal{N}=(4,4)$ суперсимметрией, была впервые выдвинута в [20].

Приложение A

В этом приложении мы даем конкретную параметризацию фермионных матриц в $n = 3$ и $n = 5$ случаях. В частности, доказывется простой факт, что

$$[\epsilon_L,\, T\Psi_R^2] = [\epsilon_L,\, (T\Psi_R^2)_h]\,. \tag{5.89}$$

Эта формула используется при доказательстве суперинвариантности действия.

Во-первых, вспомним, что алгебра $\mathtt{h}$ определена как подалгебра алгебры $\mathtt{g}$, так что ее элементы коммутируют с матрицей T. Затем заметим, что в силу того, что $\{T,\, \Psi_R\} = 0$, матрица $T\Psi_R^2$ очевидно коммутирует с T. Однако, она не обязательно принадлежит $\mathtt{h}$, ибо может содержать члены, пропорциональные единичной матрице, как демонстрируется ниже (и потому (5.89) верно). Во-вторых, заметим, что выбирая представление

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} 0 & \psi_+ \\ i\psi_+^\dagger\Sigma & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad T = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix}\,, \tag{5.90}$$

мы получаем

$$T\Psi_R^2 = 2T\begin{pmatrix} \psi_+\psi_+^\dagger & 0 \\ 0 & -\psi_+^\dagger\psi_+ \end{pmatrix}T = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_+\psi_+^\dagger & 0 \\ 0 & -\psi_+^\dagger\psi_+ \end{pmatrix}\,. \tag{5.91}$$

Рассмотрим теперь случай $n = 3$. Тогда $\mathtt{h} = \tilde{\mathtt{h}} \oplus \tilde{\mathtt{h}} = u(1) \oplus u(1)$ и

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \psi_+\psi_+^\dagger = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_1^\dagger & 0 \\ 0 & \xi_2\xi_2^\dagger \end{pmatrix}\,, \quad \psi_+^\dagger\psi_+ = \begin{pmatrix} \xi_2^\dagger\xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_1^\dagger\xi_1 \end{pmatrix}\,, \tag{5.92}$$

где $\xi_{1,2}$ есть комплексные фермионы. Если у нас имеется матрица $Q = \mathrm{diag}\{a, b\}$, то ее $\tilde{\mathtt{h}} = u(1)$-проекция есть $Q_h = \sigma_3 \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(Q\sigma_3) = \frac{a-b}{2}\sigma_3$. Тогда очевидно, что $Q - Q_h = \frac{a+b}{2}\sigma_0$, что приводит к

$$T\Psi_R^2 - (T\Psi_R^2)_h = \frac{1}{4}(\xi_1^\dagger\xi_1 + \xi_2^\dagger\xi_2)I_4\,. \tag{5.93}$$

Ясно, что эта матрица коммутирует с ϵ_L, что завершает доказательство равенства (5.89) в случае $n = 3$.

Рассмотрим теперь случай $n = 5$, где $\tilde{\mathtt{h}} = su(2) \oplus su(2)$ и (см. приложение B в [6])

$$X_R = \begin{pmatrix} 0 & \Xi_1 \\ \Xi_2 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \psi_+\psi_+^\dagger = \begin{pmatrix} \Xi_1\Xi_1^\dagger & 0 \\ 0 & \Xi_2\Xi_2^\dagger \end{pmatrix}\,, \quad \psi_+^\dagger\psi_+ = \begin{pmatrix} \Xi_2^\dagger\Xi_2 & 0 \\ 0 & \Xi_1^\dagger\Xi_1 \end{pmatrix}\,, \tag{5.94}$$

где введены матрицы

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_3 + i\alpha_4 \\ -\alpha_3 + i\alpha_4 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix}\,, \qquad \Xi_2 = \begin{pmatrix} \alpha_5 - i\alpha_6 & -\alpha_7 - i\alpha_8 \\ -\alpha_7 + i\alpha_8 & -\alpha_5 - i\alpha_6 \end{pmatrix}\,. \tag{5.95}$$

Отсюда можно прямо показать, что

$$\Xi_1\Xi_1^\dagger = 2i(\alpha_3\alpha_2 + \alpha_4\alpha_1)\sigma_1 + 2i(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_4)\sigma_2 + 2i(\alpha_2\alpha_1 + \alpha_4\alpha_3)\sigma_3 \tag{5.96}$$

и

$$\Xi_2\Xi_2^\dagger = 2i(\alpha_6\alpha_7 + \alpha_8\alpha_5)\sigma_1 + 2i(\alpha_7\alpha_5 + \alpha_8\alpha_6)\sigma_2 + 2i(\alpha_5\alpha_6 + \alpha_8\alpha_7)\sigma_3\,. \tag{5.97}$$

Тогда $\psi_+\psi_+^\dagger = (\psi_+\psi_+^\dagger)_h$, $\psi_+^\dagger\psi_+ = (\psi_+^\dagger\psi_+)_h$. Следовательно $T\Psi_R^2 = (T\Psi_R^2)_h$.

Приложение B

В этом приложении мы рассмотрим вид лагранжиана, описывающего динамику чисто бозонных полей в компонентном виде, т.е. полей, параметризующих матричное бозонное поле g. Для простоты рассмотрим только $n = 3$ модель. Хотя она не имеет суперструнной интерпретации, в силу неправильной размерности пространства-времени и, следовательно, наличия конформной аномалии, на ее примере можно проследить принципиальные качественные моменты, такие как наличие нелокальных суперсимметрий и духов в WZW действии, что объединяет ее с $n = 5$ моделью.

Рассмотрим бозонное поле

$$g = \mathrm{diad}\{g_A,\, g_S\} \in SU(1,1) \times SU(2)\,, \tag{5.98}$$

входящее в WZW действие через повернутое поле $\tilde{g} = u^{-1} g \bar{u}$:

$$S_{WZW} = S_\sigma + \text{WZ-term} = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \mathrm{STr}(d\tilde{g}\, d\tilde{g}^{-1}) + \text{WZ-term}\,, \tag{5.99}$$

что есть чисто бозонная часть ПР суперструнного действия S'_{tot}. Выберем параметризацию

$$\tilde{g}_A = \begin{pmatrix} e^{i\chi}\cosh\phi & e^{-i\rho}\sinh\phi \\ e^{i\rho}\sinh\phi & e^{-i\chi}\cosh\phi \end{pmatrix}\,, \quad \tilde{g}_S = \begin{pmatrix} e^{i\lambda}\cos\varphi & ie^{-i\theta}\sin\varphi \\ ie^{i\theta}\sin\varphi & e^{-i\lambda}\cos\varphi \end{pmatrix}\,. \tag{5.100}$$

В результате мы получаем следующее выражение для сигма модельного члена действия бозонных полей:

$$S_{WZW} = \int d^2\sigma \left(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\theta^2 + \cos^2\varphi\, d\lambda^2 + d\phi^2 + \sinh^2\phi\, d\rho^2 - \cosh^2\phi\, d\chi^2 \right)\,, \tag{5.101}$$

и выражение для члена WZ:

$$S_{WZ} = \frac{1}{12}\int d^2\sigma \varepsilon^{ab} \left(\partial_a\lambda\partial_b\theta\cos 2\varphi - \partial_a\chi\partial_b\rho\cosh 2\phi \right)\,. \tag{5.102}$$

Видно, что знак перед кинетическим членом поля χ неверный, что делает соответствующий пропагатор отрицательным, т.е. поле χ является духовым.

Если калибровать подгруппу $H = U(1) \times U(1)$, то член WZ исчезает (как член WZ на 2-сфере), и, после исключения калибровочных полей с помощью их алгебраических уравнений движения, получаем сигма модельное действие на двух конформных 2-сферах

$$S_{gWZW} = \int d^2\sigma \left(d\varphi^2 + \cot^2\varphi\, d\lambda^2 + d\phi^2 + \coth^2\phi\, d\chi^2 \right) \tag{5.103}$$

с правильными знаками перед кинетеческими членами.

Список литературы

[1] M. Grigoriev, A.A. Tseytlin, *Pohlmeyer reduction of $AdS_5 \times S^5$ superstring sigma model*, Nucl. Phys. B **800** (2008) 450, `arXiv:0711.0155 [hep-th]`.

[2] M. Grigoriev, A.A. Tseytlin, *On reduced models for superstrings on $AdS_n \times S^n$*, Int. J. Mod. Phys. A **23** (2008) 2107, `arXiv:0806.2623 [hep-th]`.

[3] A. Mikhailov and S. Schäfer-Nameki, *Sine-Gordon like action for the superstring in $AdS_5 \times S^5$*, JHEP **0805** (2008) 075, `arXive:0711.0195 [hep-th]`.

[4] R. Roiban, A.A. Tseytlin, *UV-finiteness of Pohlmeyer-reduced form of the $AdS_5 \times S^5$ superstring theory*, JHEP **0904** (2009) 078, `arXiv:0902.2489 [hep-th]`.

[5] B. Hoare, Y. Iwashita, and A.A. Tseytlin, *Pohlmeyer-reduced form of string theory in $AdS_5 \times S^5$: semiclassical expansion*, J. Phys. A **42** (2009) 375204, `arXiv:0906.3800 [hep-th]`; Y. Iwashita, *One-loop corrections to $AdS_5 \times S^5$ superstring partition function via Pohlmeyer reduction*, `arXiv:1005.4386v2 [hep-th]`.

[6] B. Hoare, A.A. Tseytlin, *Tree-level S-matrix of Pohlmeyer reduced form of $AdS_5 \times S^5$ superstring theory*, JHEP **1002** (2010) 094, `arXiv:0912.2958 [hep-th]`.

[7] K. Pohlmeyer, *Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints*, Commun. Math. Phys. **46** (1976) 207.

[8] M. Goykhman, E. Ivanov, *Worldsheet supersymmetry of Pohlmeyer-reduced $AdS_n \times S^n$ superstrings*, `arXiv:1104.0706 [hep-th]`.

[9] R. Rohm, *Anomalous interactions for the supersymmetric nonlinear σ model in two dimensions*, Phys. Rev. D **32** (1984) 2849.

[10] E. Witten, *The N matrix model and gauged WZW models*, Nucl. Phys. B **371** (1992) 191.

[11] T. Nakatsu, *Supersymmetric gauged Wess-Zumino-Witten models*, Progr. Theor. Phys. **87** (1991) 795.

[12] A. Polyakov, P.B. Wiegmann, *Theory of non-abelian Goldstone bosons in two dimensions*, Phys. Lett. B **131** (1983) 121.

[13] A. Polyakov, P.B. Wiegmann, *Goldstone fields in two dimensions with multivalued actions*, Phys. Lett. B **141** (1984) 223.

[14] I. Bakas, *Conservation laws and geometry of perturbed coset models*, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 3443, `hep-th/9310122`.

[15] I. Bakas, Q-Han Park and H-J Shin, *Lagrangian formulation of symmetric space sine-Gordon models*, Phys. Lett B **372** (1996) 45, `hep-th/9512030`.

[16] M. Henneaux and L. Mezincescu, *A σ-model interpretation of Green-Schwarz covariant superstring action*, Phys. Lett. B **152** (1985) 340.

[17] R.R. Metsaev, A.A. Tseytlin, *Type IIB superstring action on $AdS_5 \times S^5$ background*, Nucl. Phys. B **533** (1998) 109, `hep-th/9805028`.

[18] K.I. Kobayashi and T. Uematsu, *N=2 supersymmetric Sine-Gordon theory and conservation laws*, Phys. Lett. B **264** (1991) 107.

[19] K.I. Kobayashi, T. Uematsu, and Y.Z. Yu, *Quantum conserved charges in N=1 and N=2 supersymmetric Sine-Gordon theories*, Nucl. Phys. B **397** (1993) 283.

[20] D.M. Schmidtt, *Supersymmetry Flows, Semi-Symmetric Space Sine-Gordon Models And The Pohlmeyer Reduction*, JHEP **1103** (2011) 021, `arXiv:1012.4713 [hep-th]`.

[21] S.J. Gates, Jr., C.M. Hull, M. Roček, *Twisted supermultiplets and new supersymmetric nonlinear sigma models*, Nucl. Phys. B **248** (1984) 157.

[22] E.A. Ivanov, S.O. Krivonos, *N=4 Super Liouville Equation*, J. Phys. A **17** (1984) L671.

[23] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, and E. Sokatchev, *Unconstrained* $N = 2$ *matter, Yang-Mills and supergravity theories in harmonic superspace*, Class. Quant. Grav. **1** (1984) 469.

[24] E. Ivanov, A. Sutulin, *Sigma models in* $(4, 4)$ *harmonic superspace*, Nucl. Phys. B **432** (1994) 246, `hep-th/9404098`; *ibid* B **483** (1997) 531E.

[25] B. Hoare and A.A. Tseytlin, *Towards the quantum S-matrix of the Pohlmeyer reduced version of* $AdS_5 \times S^5$ *supertstring theory*, `arXiv:1104.2423 [hep-th]`.

[26] T.J. Hollowood and J.L. Miramontes, *The* $AdS_5\times S^5$ *Semi-Symmetric Space Sine-Gordon Theory*, `arXiv:1104.2429 [hep-th]`.