

Московский ордена Трудового Красного Знамени
физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра физики взаимодействия частиц высоких энергий
Объединенный институт ядерных исследований
Учебно-научный центр

Кожевникова М. Е.

Обработка экспериментальных данных по
 e^+e^- -аннигиляции в адроны с помощью
преобразования Бореля

Магистерская диссертация

Научные руководители:

д. ф.-м. н. Бакулев А. П.

и д. ф.-м. н. Теряев О. В.

Рецензент:

к. ф.-м. н. Нестеренко А. В.

Дубна. Июнь 2012

Содержание

Цель работы	3
Введение	4
Глава 1. Подгонка экспериментально измеренных сечений e^+e^- -аннигиляции	7
1.1 Пересчет сечений процессов в R -отношения и определение функции Адлера	10
Глава 2. Применение преобразования Бореля	12
2.1 Преобразование Бореля от константы связи КХД	12
2.2 Преобразование Бореля для константы связи КХД с фактором $s_\pi/(s_\pi + Q^2)$	14
2.3 Преобразование Бореля от D -функции	14
Глава 3. Нахождение коэффициентов при степенных поправках в разложении D -функции	16
Заключение	18
Мой вклад в работу	18
Список использованных источников	19

Цель работы

Целью данной работы является исследование структуры степенных поправок непертурбативной КХД при стандартном и модифицированном по Аналитической Теории Возмущений (АТВ) определении пертурбативного вклада.

Большая часть проверок Стандартной Модели сделана с привлечением ТВ. Поэтому вопрос о сходимости рядов теории возмущений в квантовой теории поля является достаточно актуальным. Интересной отличительной особенностью АТВ является существенное уменьшение высших вкладов в модифицированные (нестепенные) ряды, получаемые из обычных степенных рядов ТВ [1, 2].

Однако при изменении формализма теории возмущений (от стандартной ТВ к АТВ) возможно [3, 4, 5] изменение непертурбативных “степенных” поправок.

Целью дипломной работы является изучение величины такого изменения при анализе функции Адлера векторных токов. Выбор этого объекта продиктован следующими соображениями:

- Во-первых, функция Адлера инвариантна относительно ренормгрупповых преобразований;
- Во-вторых, она имеет дисперсионное представление, причем ее спектральная плотность связана с R -отношением e^+e^- -аннигиляции;
- И, наконец, в-третьих в области низких энергий R -отношение e^+e^- -аннигиляции достаточно хорошо промерено.

Для подавления больших погрешностей в области $s \geq s_0$, связанных с заменой $R_{\text{exp}}(s) \rightarrow R_{\text{PT}}(s)$, используется преобразование Бореля (0.7). Преобразование осуществляется для обоих представлений функции Адлера $D(Q^2)$, “экспериментального” ($D_{\text{exp}}(Q^2) \rightarrow \Phi_{\text{exp}}(M^2)$) и “теоретического” ($D_{\text{th}}(Q^2) \rightarrow \Phi_{\text{th}}(M^2)$). При этом оценивается коэффициент c_1 при вкладе $1/Q^2$ в операторном разложении функции Адлера $D_{\text{th}}(Q^2)$. Основным результатом работы является численное значение коэффициента c_1 как в стандартной ТВ, так и в АТВ: оно оказывается ненулевым и отрицательным, $c_1 \simeq -0.47 \pm 0.01 \text{ ГэВ}^2$ (в стандартном подходе) и $c_1 \simeq -0.45 \pm 0.01 \text{ ГэВ}^2$ (в аналитическом подходе). Эти значения заметно превосходят наивный вклад аналитизации, равный $-(4\Lambda^2/9 = 0.04 \div 0.08 \text{ ГэВ}^2)$.

Введение

Квантовая хромодинамика (КХД) описывает сильные взаимодействия элементарных частиц. С помощью методов теории возмущений получены многочисленные подтверждения того, что КХД правильно описывает сильные взаимодействия в области больших передач импульса $Q^2 \gg 1 \text{ ГэВ}^2$ [6, 7]. Однако при малых $Q^2 \lesssim 1 \text{ ГэВ}^2$ бегущая константа связи $\alpha_s(Q^2)$ растет, что делает теорию возмущений неприменимой. В такой ситуации используется два подхода: в первом строятся различные ИК устойчивые (т. е. несингулярные) модели поведения $\alpha_s(Q^2)$ при малых Q^2 , учитывающие тем не менее ренормгрупповую асимптотику при больших Q^2 (или малых α_s). Во втором подходе на основе дисперсионного представления для корреляторов $\Pi(Q^2)$, связанных с интересующими нас амплитудами или формфакторами, и их операторного разложения по обратным степеням Q^2

$$D(Q^2) = \text{const} + \sum_{n \geq 2} \frac{C_n}{Q^{2n}} \quad (0.1)$$

строятся правила сумм (ПС) КХД [8], позволяющие получить информацию о поведении интересующих нас величин в области достаточно низких значений $Q^2 \simeq 1 \text{ ГэВ}^2$.

Среди используемых ИК устойчивых моделей для эффективного заряда КХД особое положение занимает аналитическая модель Ширкова–Соловцова [9], восходящая своими корнями к работе [10], где была построена аналитическая модель эффективного заряда в КЭД, и к работам [11, 12], в которых были построены несингулярные эффективные заряды КХД во временноподобной области. Этот подход, называемый Аналитической Теорией Возмущений (АТВ), основан на совместном использовании ренормгруппы (РГ) и дисперсионного представления типа Челлена–Лемана [13], что дает возможность определить эффективный заряд также и во временноподобной области ($s > 0$). При этом степени эффективного заряда α_s^n в стандартной теории возмущений переходят в нестепенные объекты АТВ.

$$\{\bar{\mathfrak{A}}_n\} \xleftarrow{\text{TL}} \{\alpha_s^n\} \xrightarrow{\text{SL}} \{\bar{\mathcal{A}}_n\},$$

где TL обозначает минковскую область, а SL — евклидову.

В подходе отсутствуют подгоночные параметры и он хорошо согласуется с низкоэнергетическими моделями [14] адронного спектра. В однопетлевом приближении при этом получается

$$\bar{\mathcal{A}}_1^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \left[\frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} - \frac{\Lambda^2}{Q^2 - \Lambda^2} \right]; \quad (0.2a)$$

$$\bar{\mathfrak{A}}_1^{(1)}(s) = \frac{4}{b_0} \arccos \left(\frac{\ln(s/\Lambda^2)}{\sqrt{\ln^2(s/\Lambda^2) + \pi^2}} \right), \quad (0.2b)$$

где $b_0 = 11 - 2N_f/3$ — первый коэффициент бета-функции КХД. Здесь, однако, возникает вопрос о появлении в выражении для однопетлевого аналитического заряда (0.2a) вклада, ведущего себя в пределе больших Q^2 как Λ^2/Q^2 . Дело в том, что в операторном разложении такие вклады отсутствуют по очень простой причине: в КХД нет калибровочно-инвариантных локальных операторов размерности 2. В АТВ

считается, что такие вклады генерируются из вклада единичного оператора в операторном разложении (0.1) аналогично тому, как в стандартной ТВ возникает параметр масштаба Λ^2 , имеющий как раз размерность 2.

В стандартной теории возмущений КХД в операторном разложении функции $D(Q^2)$ отсутствует вклад, пропорциональный $1/Q^2$, так как для этого него не существует калибровочно-инвариантного оператора размерности 2. Но теория возмущений работает не всегда. Поэтому следует проверить без ссылок на теорию возмущений, есть ли такой вклад в разложении. Для ответа на этот вопрос мы будем использовать экспериментальные данные по полным сечениям рассеяния $\sigma(s)$ в зависимости от энергии в системе центра масс \sqrt{s} для следующих реакций e^+e^- -аннигиляции в адроны:

$$e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- [15]; \quad (0.3a)$$

$$e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^- [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]; \quad (0.3b)$$

$$e^+e^- \rightarrow 3\pi^+3\pi^- [27]; \quad (0.3c)$$

$$e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^-2\pi^0 [27]. \quad (0.3d)$$

D -функция может быть записана двумя способами — через R -отношение в дисперсионном подходе

$$D_{\text{Disp}}(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{R(s) ds}{(s + Q^2)^2} \quad (0.4a)$$

и в виде операторного разложения в ряд, в стандартной ТВ КХД как¹

$$D_{\text{РТ+ОРЕ}}(Q^2) = N_c \sum_q e_q^2 \left[1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \Gamma(n) \frac{c_n}{Q^{2n}} \right], \quad (0.4b)$$

а в АТВ КХД, соответственно, как

$$D_{\text{АРТ+ОРЕ}}(Q^2) = N_c \sum_q e_q^2 \left[1 + \frac{\bar{A}_1(Q^2)}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \Gamma(n) \frac{c_n}{Q^{2n}} \right]. \quad (0.4c)$$

Здесь $N_c = 3$ — число цветов у кварков, а $\sum_q e_q^2$ — сумма квадратов зарядов e_f кварков по всем активным при данной энергии $s = Q^2$ флейворам кварков. При анализируемых нами энергиях активными являются три флейвора кварков (u , d и s), однако вклад s -кварков можно не учитывать, так как мы отбираем в эксперименте события без странных частиц, так что эта сумма равна $\sum_q e_q^2 = e_u^2 + e_d^2 = 5/9$, а значит общий фактор $N_c \sum_q e_q^2 = 5/3$.

Коэффициенты стандартного пертурбативного разложения d_n для вклада единичного оператора были рассчитаны вплоть до порядка $n = 4$ в работах [28, 29, 30, 31], однако, мы будем использовать только однопетлевое выражение. Коэффициенты операторного разложения c_n при $n \geq 2$ были получены в работе [8]. Зная из имеющихся экспериментальных данных $R_{\text{exp}}(s)$ можно рассчитать соответствующее “экспериментальное” значение

$$D_{\text{exp}}(Q^2) = Q^2 \int_0^{s_0} \frac{R_{\text{exp}}(s) ds}{(s + Q^2)^2} + Q^2 \int_{s_0}^\infty \frac{R_{\text{th}}(s) ds}{(s + Q^2)^2} \quad (0.5)$$

¹Фактор $\Gamma(n)$ мы ввели для того, чтобы после преобразования Бореля он сокращался, см. (0.8b)–(0.8c) и (2.2).

К сожалению, экспериментальное сечение $R_{\text{exp}}(s)$ хорошо промерено только для не очень больших значений s , и поэтому мы ограничиваемся значением $s_0 \sim 1.5 \text{ ГэВ}^2$, которое было определено в [8, 32] из условия дуальности вкладов $R_{\text{exp}}(s)$ и $R_{\text{th}}(s)$ в интеграл $\int_0^{s_0} R(s) ds / (s + Q^2)^2$. Для $s > s_0$ мы будем использовать рассчитанную пертурбативно функцию $R_{\text{th}}(s) = 5/3(1 + \alpha_s(s)/\pi)$ (здесь коэффициент $5/3 = N_c \sum_q e_q^2$, где N_c — число цветов, и суммируем мы по кваркам $q = u, d$):

$$R_{\text{exp-th}}(s) = R_{\text{exp}}(s) \theta(s < s_0) + R_{\text{th}}(s) \theta(s > s_0). \quad (0.6)$$

Для подавления больших погрешностей в области $s \geq s_0$, связанных с заменой $R_{\text{exp}}(s) \rightarrow R_{\text{PT}}(s)$, мы используем для $D(Q^2)$ преобразование Бореля:

$$\Phi(M^2) = \hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2}[D(Q^2)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-Q^2)^n}{\Gamma(n)} \left[\frac{d^n}{dQ^{2n}} D(Q^2) \right]_{Q^2 = nM^2} \quad (0.7)$$

Преобразование осуществляется для обоих представлений $D(Q^2)$:

$$\Phi_{\text{exp}}(M^2) = \int_0^\infty R_{\text{exp-th}}(s) \left(1 - \frac{s}{M^2}\right) e^{-s/M^2} \frac{ds}{M^2}; \quad (0.8a)$$

$$\Phi_{\text{PT+OPE}}(M^2) = \frac{5}{3} \left\{ \hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} \left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right] + \frac{c_1}{M^2} + \frac{c_2}{M^4} + \frac{c_3}{M^6} \right\}; \quad (0.8b)$$

$$\Phi_{\text{ART+OPE}}(M^2) = \frac{5}{3} \left\{ \hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} \left[\frac{\bar{\mathcal{A}}_1(Q^2)}{\pi} \right] + \frac{c_1}{M^2} + \frac{c_2}{M^4} + \frac{c_3}{M^6} \right\}. \quad (0.8c)$$

В результате подгонки “теоретической” функции $\Phi_{\text{th}}(M^2)$ к “полуэкспериментальной” $\Phi_{\text{exp}}(M^2)$ оценивается коэффициент c_1 при вкладе Λ^2/Q^2 . Нас будет интересовать, как переход от стандартной ТВ к АТВ сказывается на значении этого коэффициента c_1 .

Глава 1. Подгонка экспериментально измеренных сечений e^+e^- -аннигиляции

Для аналитического описания набора экспериментальных точек $\{(s_i, f_{\text{exp}}(s_i))\}_{i=1,\dots,N}$ подбирается аналитическая функция $f_{\text{th}}(s; \{a_1, \dots, a_d\})$ зависимости сечения от энергии, которая максимально хорошо ложится на экспериментальный график. Мы определяем такую функцию $f_{\text{th}}(s; \{a_1, \dots, a_d\})$ с помощью минимизации χ^2 -функционала

$$\chi^2(a_1, \dots, a_d) = \frac{1}{N_{\text{d.f.}}} \sum_{n=1}^N \frac{(f_{\text{exp}}(s_n) - f_{\text{th}}(s_n; \{a_1, \dots, a_d\}))^2}{\delta f_{\text{exp}}(s_n)^2}, \quad (1.1)$$

где N — число экспериментальных точек, а $N_{\text{d.f.}} = N - d$ — число степеней свободы в процедуре подгонки (d есть число параметров). Пересчет пионного формфактора $F_\pi(s)$ в сечение производится по формуле:

$$\sigma(s) = 0.3898 |F_\pi(s)|^2 \frac{\pi \alpha_{\text{em}}^2}{3s} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \theta(s - 4m_\pi^2) 10^6 \text{ нб}. \quad (1.2)$$

Здесь $\alpha_{\text{em}} = 1/137$ — константа связи электромагнитного взаимодействия (постоянная тонкой структуры), а m_π — масса π -мезона.

Для описания экспериментальных данных по реакции $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, которые приводятся в виде зависимости квадрата формфактора $|F_\pi(s)|^2$ от энергии \sqrt{s} , мы используем модель с 4 резонансами, причем формфактор каждого резонанса V берется в соответствии с моделью Брейта–Вигнера:

$$F^{\text{BW}}(s, m_V, \Gamma_V) = \frac{m_V^2}{m_V^2 - s - i\sqrt{s} \Gamma_V(s)}, \quad (1.3a)$$

где

$$\Gamma_V(s) = \Gamma_V \frac{m_V^2}{s - 4m_\pi^2} \left(\frac{k(s)}{k(m_V)} \right)^3 = \Gamma_V \frac{k(s) m_V^2}{4k(m_V)^3}, \quad k(s) = \frac{\sqrt{s - 4m_\pi^2}}{2}, \quad (1.3b)$$

причем $F^{\text{BW}}(0, m_V, \Gamma_V) = 1$ автоматически. Полный формфактор пиона с резонансами ρ , ω , ρ' и ρ'' строится следующим образом:

$$F_\pi(s, \{m_i, \Gamma_i, \alpha_i\}) = \frac{F_\pi(s, \{\rho, \omega\}) + \alpha_1 F^{\text{BW}}(s, m_{\rho'}, \Gamma_{\rho'}) + \alpha_2 F^{\text{BW}}(s, m_{\rho''}, \Gamma_{\rho''})}{1 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad (1.3c)$$

где

$$F_\pi(s, \{\rho, \omega\}) = F^{\text{BW}}(s, m_\rho, \Gamma_\rho) \frac{1 + \alpha_\omega F^{\text{BW}}(s, m_\omega, \Gamma_\omega)}{1 + \alpha_\omega}. \quad (1.3d)$$

При подгонке экспериментальных данных по $|F_\pi|^2(s)$ из работы [15] получены такие значения параметров резонансов:

$$m_\rho = 770 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_\rho = 150 \text{ МэВ}; \quad (1.4a)$$

$$m_\omega = 781 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_\omega = 9 \text{ МэВ}, \quad \alpha_\omega = 0.001; \quad (1.4b)$$

$$m_{\rho'} = 1370 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{\rho'} = 426 \text{ МэВ}, \quad \alpha_1 = -0.389; \quad (1.4c)$$

$$m_{\rho''} = 1600 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{\rho''} = 1394 \text{ МэВ}, \quad \alpha_2 = 0.326. \quad (1.4d)$$

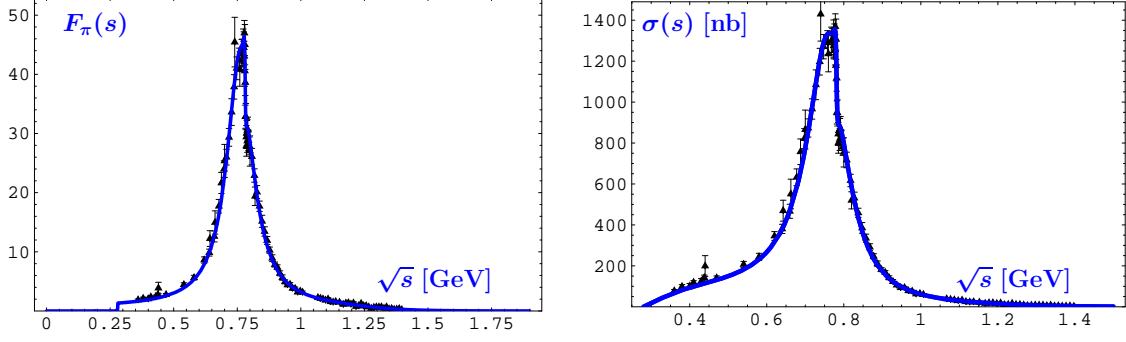


Рис. 1: Экспериментальная и аналитическая зависимости квадрата формфактора (слева), сечения (справа) от энергии для процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$.

При этом в точке наилучшей подгонки $\chi_{\text{b.f.}}^2 = 0.99$.² На левой панели Рис. 1 мы показываем вид полученной кривой для квадрата формфактора пиона в сопоставлении с имеющимися экспериментальными данными. На правой панели этого рисунка мы показываем аналогичное сопоставление, но уже для сечения реакции $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, получаемого из формфактора по формуле (1.2).

Для описания зависимости сечения от энергии для процессов $e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^-2\pi^0$, $e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^-2\pi^0$ и $e^+e^- \rightarrow 3\pi^+3\pi^-$ мы берем теоретические зависимости в виде сумм трёх гауссовых кривых:

$$\sigma(s, \{M_i, \sigma_i, \alpha_i\}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^2}{1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} e^{-(\sqrt{s}-M_i)^2/(2\sigma_i^2)}, \quad (1.5)$$

причем $\alpha_1 = 1$.

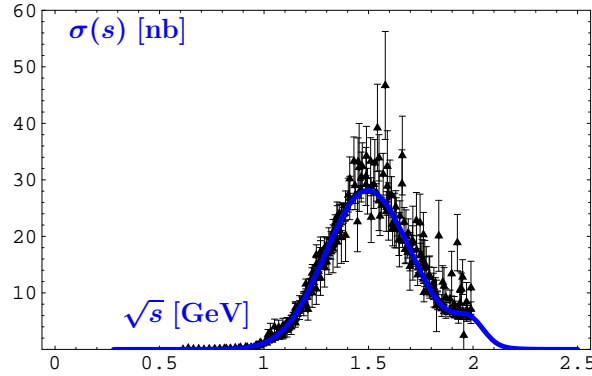


Рис. 2: Экспериментальная и аналитическая зависимости сечения от энергии для процесса $e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^-$.

Для реакции $e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^-$ получены следующие коэффициенты

$$M_1 = 1641 \text{ МэВ}, \quad \sigma_1 = 281 \text{ МэВ}; \quad (1.6a)$$

$$M_2 = 1426 \text{ МэВ}, \quad \sigma_2 = 244 \text{ МэВ}, \quad \alpha_2 = -0.782; \quad (1.6b)$$

$$M_3 = 2007 \text{ МэВ}, \quad \sigma_3 = 77 \text{ МэВ}, \quad \alpha_3 = 0.619. \quad (1.6c)$$

²Следует сравнить это значение со значениями $\chi^2 = 1.54$ и $\chi^2 = 1.79$, полученными в недавней работе [35] по формфактору пиона в теоретикополевой модели с учетом резонансов $\rho(770)$, $\omega(780)$, $\rho(1450)$ и $\rho(1700)$ при обработке более новых данных групп SND [36] и CMD-2 [37, 38, 39].

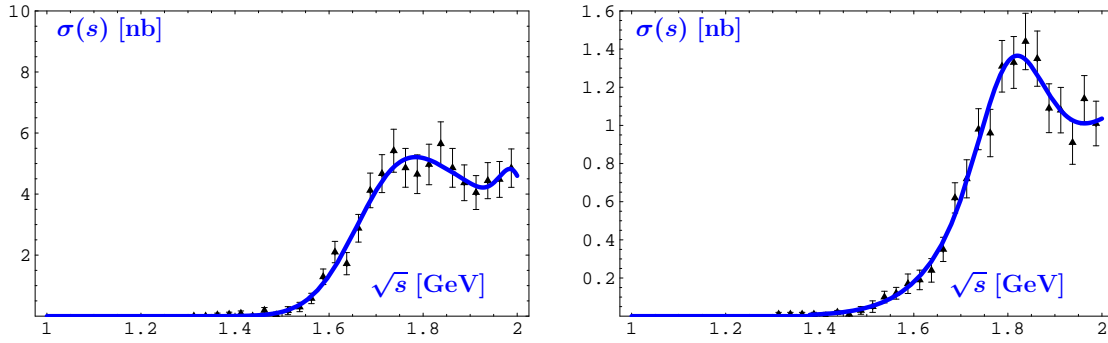


Рис. 3: Экспериментальная и аналитическая зависимости сечения от энергии для процессов $e^+e^- \rightarrow 3\pi^+3\pi^-$ (слева), $e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^-2\pi^0$ (справа).

При этом качество фита $\chi_{\text{b.f.}}^2 = 0.96$ — см. Рис. 2.

Для реакции $e^+e^- \rightarrow 3\pi^+3\pi^-$ получены следующие коэффициенты:

$$M_1 = 2223 \text{ МэВ}, \quad \sigma_1 = 348 \text{ МэВ}; \quad (1.7a)$$

$$M_2 = 1805 \text{ МэВ}, \quad \sigma_2 = 79 \text{ МэВ}, \quad \alpha_2 = 0.577; \quad (1.7b)$$

$$M_3 = 1677 \text{ МэВ}, \quad \sigma_3 = 99 \text{ МэВ}, \quad \alpha_3 = 0.292. \quad (1.7c)$$

При этом качество фита $\chi_{\text{b.f.}}^2 = 0.45$ — см. левую панель Рис. 3.

Для реакции $e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^-2\pi^0$ коэффициенты таковы:

$$M_1 = 2000 \text{ МэВ}, \quad \sigma_1 = 34 \text{ МэВ}; \quad (1.8a)$$

$$M_2 = 1753 \text{ МэВ}, \quad \sigma_2 = 131 \text{ МэВ}, \quad \alpha_2 = 1.896; \quad (1.8b)$$

$$M_3 = 1985 \text{ МэВ}, \quad \sigma_3 = 112 \text{ МэВ}, \quad \alpha_3 = 1.619. \quad (1.8c)$$

При этом качество фита $\chi_{\text{b.f.}}^2 = 0.60$ — см. правую панель Рис. 3.

Суммарное сечение, с учетом вкладов от всех процессов выглядит, как показано на Рис. 4.

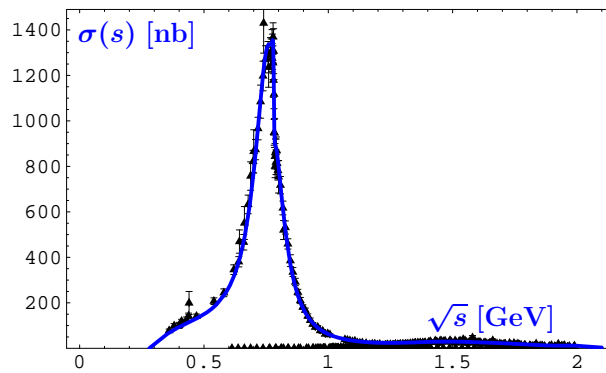


Рис. 4: Суммарное сечение всех процессов в зависимости от энергии.

1.1 Пересчет сечений процессов в R -отношения и определение функции Адлера

R -отношение по определению есть отношение сечения электрон-позитронной аннигиляции в адроны к сечению электрон-позитронной аннигиляции в пару мюонов:

$$R(s) = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}}(s)}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s)}; \quad (1.9a)$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s) = \frac{4\pi\alpha_{\text{em}}^2}{3s}. \quad (1.9b)$$

Полное R -отношение равно сумме R -отношений отдельных процессов:

$$R(s) = \sum_i R_i(s), \quad \text{где} \quad R_i(s) = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{hadrons of type } i}(s)}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s)}, \quad (1.10)$$

причем суммирование здесь проводится по реакциям (0.3a), (0.3b), (0.3c) и (0.3d). Результат суммирования по этим реакциям представлен на левой панели Рис. 5.

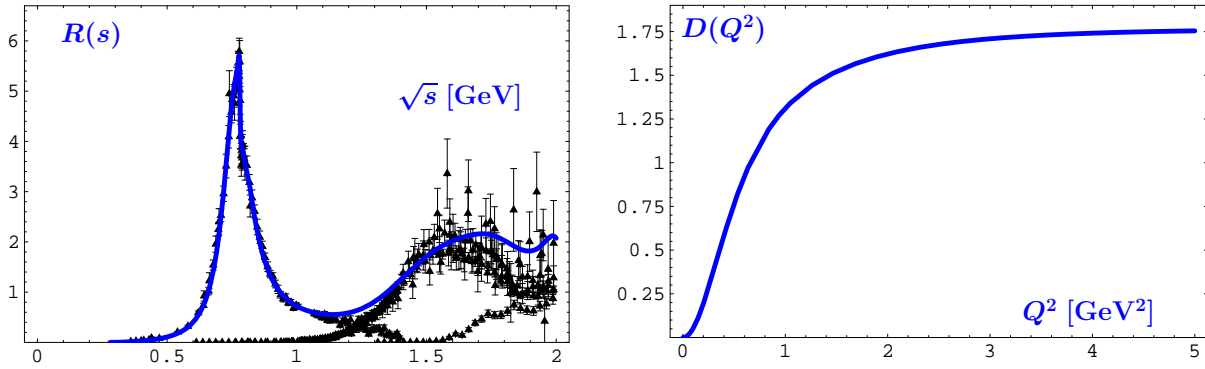


Рис. 5: Слева: R -отношение для всех процессов в зависимости от энергии \sqrt{s} в области $\sqrt{s} \leq 2$ ГэВ. Справа: Зависимость функции Адлера $D(Q^2)$ от квадрата передачи импульса в области $Q^2 \leq 5$ ГэВ².

Обратимся теперь к формуле для нахождения D -функции,

$$D_{\text{exp}}(Q^2) = Q^2 \int_{4m_\pi^2}^{s_0} \frac{R_{\text{exp}}(s) ds}{(s + Q^2)^2} + Q^2 \int_{s_0}^{\infty} \frac{R_{\text{th}}(s) ds}{(s + Q^2)^2}, \quad (1.11)$$

где мы ограничиваемся значением $s_0 \sim 1.5$ ГэВ², определенным в [8, 32] из условия дуальности вкладов $R_{\text{exp}}(s)$ и $R_{\text{th}}(s)$ в интеграл $\int_0^{s_0} R(s) ds / (s + Q^2)^2$. Для $s > s_0$ мы будем использовать рассчитанную пертурбативно функцию $R_{\text{th}}(s) = 5/3(1 + \alpha_s(s)/\pi)$:

$$R_{\text{exp-th}}(s) = R_{\text{exp}}(s) \theta(s < s_0) + R_{\text{th}}(s) \theta(s > s_0). \quad (1.12)$$

Зависимость $D(Q^2)$ от Q^2 приведена на правой панели Рис. 5.

В теоретическом выражении (0.4b) пертурбативная часть

$$D_{\text{PT}}(Q^2) = \frac{5}{3} \left[1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right] \quad (1.13)$$

возникает при подстановке в формулу (0.4a) пертурбативного выражения

$$R_{\text{th}}(s) = \frac{5}{3} \left[1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \right] \quad (1.14)$$

с последующей заменой $\mu^2 \rightarrow Q^2$. В принципе, более осмысленным (см. также в [40, 41, 42]) представляется учет порога $s_\pi = 4m_\pi^2$ в интеграле (0.4b), который явно присутствует в экспериментальной части выражения (1.11), $Q^2 \int_{s_\pi}^{s_0} R_{\text{exp}}(s) ds / (s + Q^2)^2$. При таком способе действия выражение (1.13) заменится на

$$D_{\text{РТ};m_\pi}(Q^2) = \frac{5}{3} \left[1 + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \right] \frac{Q^2}{s_\pi + Q^2} = D_{\text{РТ}}(Q^2) \left[1 - \frac{s_\pi}{s_\pi + Q^2} \right], \quad (1.15a)$$

и аналогично в случае АТВ:

$$D_{\text{АРТ};m_\pi}(Q^2) = \frac{5}{3} \left[1 + \frac{\bar{\mathcal{A}}_1(Q^2)}{\pi} \right] \frac{Q^2}{s_\pi + Q^2} = D_{\text{АРТ}}(Q^2) \left[1 - \frac{s_\pi}{s_\pi + Q^2} \right]. \quad (1.15b)$$

Из этого выражения ясно видно, что пренебрежение порогом $s_\pi \simeq (0.280)^2 \text{ ГэВ}^2$, т. е. ненулевой массой пиона, приводит к отсутствию учета вкладов типа $(5/3) s_\pi / Q^2$ в преобразованном по Борелю выражении:

$$\Phi_{\text{РТ};m_\pi}(M^2) = -\frac{5}{3} \frac{s_\pi}{M^2} e^{-s_\pi/M^2} + \frac{5}{3\pi} \hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} \left[\alpha_s(Q^2) \left(1 - \frac{s_\pi}{s_\pi + Q^2} \right) \right]; \quad (1.16a)$$

$$\Phi_{\text{АРТ};m_\pi}(M^2) = -\frac{5}{3} \frac{s_\pi}{M^2} e^{-s_\pi/M^2} + \frac{5}{3\pi} \hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} \left[\bar{\mathcal{A}}_1(Q^2) \left(1 - \frac{s_\pi}{s_\pi + Q^2} \right) \right]. \quad (1.16b)$$

Первый вклад $(5/3) (s_\pi/M^2) e^{-s_\pi/M^2}$ в области $M^2 = 0.5 - 1.5 \text{ ГэВ}^2$ примерно равен $(5/3) (s_\pi/M^2)$, т. е. он дает вклад коэффициент c_1 в (0.8b) порядка $(s_\pi/\Lambda^2) \simeq 1$.

Дальнейшие вычисления проводятся с преобразованной по Борелю D -функцией. В следующих разделах мы показываем, как производится преобразование Бореля для констант связи $\alpha_s(Q^2)$ и $\bar{\mathcal{A}}_1(Q^2)$, а также для их произведений с фактором $s_\pi/(s_\pi + M^2)$, который входит в (1.15a) и (1.15b).

В дальнейшем мы будем проводить анализ экспериментальных данных в двух случаях:

1. В пренебрежении массой π -мезона, полагая $s_\pi = 0$ и используя формулы (0.8b) и (0.8c);
2. С учетом массы π -мезона, т. е. используя формулы (1.16a) и (1.16b).

Глава 2. Применение преобразования Бореля

Преобразованием Бореля $\Phi_f(M^2)$ (ПБ) функции $f(Q^2)$ называется преобразование следующего вида:

$$\Phi_f(M^2) = \hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2}[f(Q^2)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-Q^2)^n}{\Gamma(n)} \left[\left(\frac{d}{dQ^2} \right)^n f(Q^2) \right]_{Q^2 = nM^2} \quad (2.1)$$

В процессе преобразования используется замена $Q^2 = nM^2$ с предельным переходом $n \rightarrow \infty$, так что преобразованная функция зависит уже от аргумента M^2 . Запишем пример ПБ, который понадобится нам для дальнейших вычислений:

$$\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} \left[\frac{1}{(Q^2)^\nu} \right] = \frac{1}{\Gamma(\nu) (M^2)^\nu}. \quad (2.2)$$

2.1 Преобразование Бореля от константы связи КХД

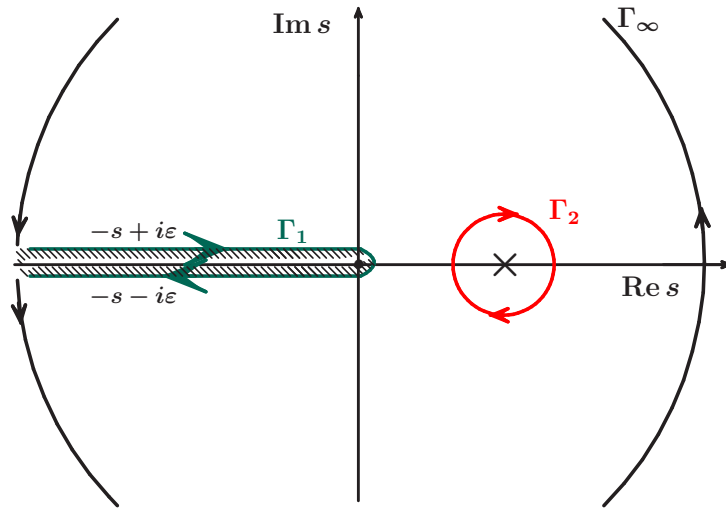


Рис. 6: Контур $\Gamma = \Gamma_{1,\infty} + \Gamma_2$. Точка Q^2 лежит на положительной действительной полуоси $\text{Re } s > 0$ и отлична от полюса Ландау, расположенного в точке $s = \Lambda^2$ и помеченного знаком \times .

Однопетлевая константа связи сильного взаимодействия имеет следующий вид:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} a(Q^2), \quad \text{где} \quad a(Q^2) = \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (2.3)$$

и Λ — масштабный параметр КХД. Для вычисления преобразования Бореля от $a(Q^2)$ применим дисперсионный подход, то есть представим $a(Q^2)$ с помощью формулы Коши для аналитической функции:

$$a(Q^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{ds}{(s - Q^2) \ln(s/\Lambda^2)}, \quad (2.4)$$

где контур Γ показан на Рис.6 с указанием направления обхода. Надо заметить, что подынтегральная функция имеет особенности в комплексной плоскости — разрез

вдоль отрицательной полуоси действительной оси $s < 0$, обусловленный наличием логарифма, и нефизический полюс в точке $s = \Lambda^2$. Поэтому контур интегрирования Γ включает в себя два контура, $\Gamma = \Gamma_{1,\infty} + \Gamma_2$, см. Рис. 6, причем первый контур состоит из двух кусков, $\Gamma_{1,\infty} = \Gamma_1 + \Gamma_\infty$, и интеграл по бесконечно удаленному контуру Γ_∞ обращается в 0, так что мы имеем следующее представление:

$$a(Q^2) = I_1(Q^2) + I_2(Q^2), \quad I_i(Q^2) = \oint_{\Gamma_i} \frac{ds}{(s - Q^2) \ln(s/\Lambda^2)} \quad (i = 1, 2). \quad (2.5a)$$

Вклад в интеграл по контуру Γ_1 даёт только интеграл вдоль разреза, где испытывает скачок мнимая часть. Он равен удвоенной мнимой части интеграла вдоль разреза.

$$I_1(Q^2) = \frac{1}{\pi} \mathbf{Im} \left[\int_0^{-\infty} \frac{ds}{(s - Q^2) \ln(s/\Lambda^2)} \right] = \int_0^\infty \frac{ds}{(s + Q^2)(\ln^2(s/\Lambda^2) + \pi^2)}. \quad (2.5b)$$

Интеграл вдоль контура L_2 сводится к вычету в точке $s = \Lambda^2$ по теореме о вычетах (необходимо учесть направление обхода контура L_2):

$$I_2(Q^2) = -\mathbf{Res}_{s=\Lambda^2} \left[\frac{1}{(s - Q^2) \ln(s/\Lambda^2)} \right] = \frac{\Lambda^2}{Q^2 - \Lambda^2}. \quad (2.5c)$$

Запишем преобразование Бореля от (2.5a):

$$\begin{aligned} \Phi_a(M^2) &\equiv \hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [a(Q^2)] \\ &= B_1(M^2) + B_2(M^2), \quad B_i(M^2) = \hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [I_i(Q^2)] \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.6a)$$

В результате несложных преобразований получаем следующие выражения для $B_1(M^2)$ и $B_2(M^2)$:

$$B_1(M^2) = \frac{1}{M^2} \int_0^\infty \frac{e^{-s/M^2} ds}{\ln^2(s/\Lambda^2) + \pi^2}, \quad B_2(M^2) = \frac{\Lambda^2}{M^2} e^{\Lambda^2/M^2}. \quad (2.6b)$$

Таким образом выражение для $\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [a(Q^2)]$ приобретает вид:

$$\Phi_a(M^2) = \frac{1}{M^2} \int_0^\infty \frac{e^{-s/M^2} ds}{\ln^2(s/\Lambda^2) + \pi^2} + \frac{\Lambda^2}{M^2} e^{\Lambda^2/M^2}. \quad (2.7)$$

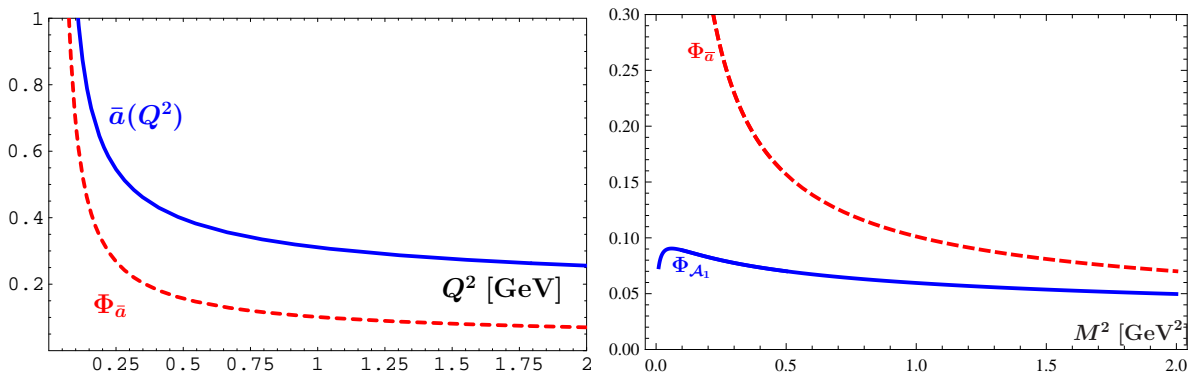


Рис. 7: Слева: Нормированная однопетлевая константа связи $a(Q^2)$ и ее борелевский образ $\Phi_a(M^2 = Q^2)$. Справа: Борелевские образы нормированных однопетлевых констант связи $\Phi_a(M^2)$ (ТВ) и $\Phi_{A_1}(M^2)$ (АТВ).

Для наглядности мы приводим графики функций $a(Q^2)$ и $\Phi_a(Q^2)$ на левой панели Рис. 7.

Если теперь посмотреть внимательно на выражение для $a(Q^2)$, см. (2.5а), и соответствующее преобразование Бореля $\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [a(Q^2)]$, см. (2.7), то становится очевидно, что мы можем тут же выписать ответ и для преобразования Бореля от нормированной аналитической константы связи $\mathcal{A}_1(Q^2) = [b_0/(4\pi)] \bar{\mathcal{A}}_1^{(1)}(Q^2)$, поскольку как видно из (0.2а) аналитическая константа отличается от однопетлевой (2.3) отсутствием полюса в точке $Q^2 = \Lambda^2$. Соответственно, получим

$$\Phi_{\mathcal{A}_1}(M^2) = \frac{1}{M^2} \int_0^\infty \frac{e^{-s/M^2} ds}{\ln^2(s/\Lambda^2) + \pi^2}. \quad (2.8)$$

2.2 Преобразование Бореля для константы связи КХД с фактором $s_\pi/(s_\pi + Q^2)$

Нас интересует преобразование Бореля следующей функции

$$b_\pi(Q^2) \equiv \frac{s_\pi a(Q^2)}{s_\pi + Q^2} = I_1(Q^2) \frac{s_\pi}{s_\pi + Q^2} + I_2(Q^2) \frac{s_\pi}{s_\pi + Q^2}. \quad (2.9)$$

где $I_1(Q^2)$, как видно из (2.5b), содержит фактор $ds/(s + Q^2)$, а $I_2(Q^2) = \Lambda^2/(Q^2 - \Lambda^2)$. Преобразуем произведение факторов:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{s + Q^2} \frac{s_\pi}{s_\pi + Q^2} &= \frac{s_\pi}{s_\pi - s} \left(\frac{ds}{s + Q^2} - \frac{ds}{s_\pi + Q^2} \right); \\ \frac{\Lambda^2}{Q^2 - \Lambda^2} \frac{s_\pi}{s_\pi + Q^2} &= \frac{s_\pi}{s_\pi + \Lambda^2} \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2 - \Lambda^2} - \frac{\Lambda^2}{s_\pi + Q^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом выражение для $\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [b_\pi(Q^2)]$ приобретает вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{b_\pi}(M^2) &= \frac{s_\pi}{M^2} \int_0^\infty \frac{[e^{-s/M^2} - e^{-s_\pi/M^2}] ds}{(s_\pi - s) [\ln^2(s/\Lambda^2) + \pi^2]} \\ &+ \frac{s_\pi}{M^2} \frac{\Lambda^2}{s_\pi + \Lambda^2} \left(e^{\Lambda^2/M^2} - e^{-s_\pi/M^2} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если теперь посмотреть внимательно на выражение (2.9) для $b_\pi(Q^2)$ и соответствующее преобразование Бореля $\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} [b_\pi(Q^2)]$, то становится очевидно, что мы можем тут же выписать ответ и для преобразования Бореля для произведения $\mathcal{B}_\pi = \mathcal{A}_1(Q^2) s_\pi/(s_\pi + Q^2)$:

$$\Phi_{\mathcal{B}_\pi}(M^2) = \frac{s_\pi}{M^2} \int_0^\infty \frac{[e^{-s/M^2} - e^{-s_\pi/M^2}] ds}{(s_\pi - s) [\ln^2(s/\Lambda^2) + \pi^2]}. \quad (2.11)$$

2.3 Преобразование Бореля от D -функции

Как уже говорилось, D -функция может быть представлена двумя различными способами: в виде дисперсионного соотношения и в виде ряда операторного разложения, см. формулы (0.4). И для каждого из представлений применяется преобразование Бореля.

В случае (0.4а) вычисление проводится по следующей схеме. Подынтегральное выражение в D_{Disp} представим в следующем виде:

$$\frac{Q^2}{(s+Q^2)^2} = \frac{1}{s+Q^2} + s \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+Q^2} \right).$$

Учтем, что операции d/ds и ПБ перестановочны и используем очевидное свойство преобразования Бореля

$$\hat{B}_{Q^2 \rightarrow M^2} \left[\frac{1}{s+Q^2} \right] = \frac{1}{M^2} e^{-s/M^2}.$$

Затем вычислим:

$$s \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{M^2} e^{-s/M^2} \right) = -\frac{s}{M^4} e^{-s/M^2}.$$

в результате получим окончательный ответ

$$\Phi_{\text{exp}}(M^2) = \int_0^\infty R_{\text{exp-th}}(s) \left(1 - \frac{s}{M^2} \right) e^{-s/M^2} \frac{ds}{M^2}. \quad (2.12)$$

Построим теперь преобразование Бореля для операторного разложения функции Адлера в случае учета пионного порога ($s_\pi \neq 0$), см. (1.16а) или (1.16b). Все необходимые для этого ингредиенты имеются:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{PT};m_\pi}(M^2) &= \frac{5}{3} \left\{ -\frac{s_\pi}{M^2} e^{-s_\pi/M^2} + \frac{4}{b_0} [\Phi_a(M^2) - \Phi_{b_\pi}(M^2)] \right\} \\ &= \frac{5}{3} \left\{ -\frac{s_\pi}{M^2} e^{-s_\pi/M^2} + \frac{4}{b_0} \frac{\Lambda^2}{M^2} \frac{s_\pi e^{-s_\pi/M^2} + \Lambda^2 e^{\Lambda^2/M^2}}{s_\pi + \Lambda^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{b_0} \int_0^\infty \frac{ds}{M^2(s-s_\pi)} \frac{s e^{-s/M^2} - s_\pi e^{-s_\pi/M^2}}{\ln^2(s/\Lambda^2) + \pi^2} \right\}; \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{APT};m_\pi}(M^2) &= \frac{5}{3} \left\{ -\frac{s_\pi}{M^2} e^{-s_\pi/M^2} + \frac{4}{b_0} [\Phi_{\mathcal{A}_1}(M^2) - \Phi_{\mathcal{B}_\pi}(M^2)] \right\} \\ &= \frac{5}{3} \left\{ -\frac{s_\pi}{M^2} e^{-s_\pi/M^2} + \frac{4}{b_0} \int_0^\infty \frac{ds}{M^2(s-s_\pi)} \frac{s e^{-s/M^2} - s_\pi e^{-s_\pi/M^2}}{\ln^2(s/\Lambda^2) + \pi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.13b)$$

Тогда вид преобразованных по Борелю D -функций выражается формулами:

$$\Phi_{\text{PT+OPE};m_\pi}(M^2) = \Phi_{\text{PT};m_\pi}(M^2) + \frac{5}{3} \left\{ \frac{c_1}{M^2} + \frac{c_2}{M^4} + \frac{c_3}{M^6} \right\}; \quad (2.14a)$$

$$\Phi_{\text{APT+OPE};m_\pi}(M^2) = \Phi_{\text{APT};m_\pi}(M^2) + \frac{5}{3} \left\{ \frac{c_1}{M^2} + \frac{c_2}{M^4} + \frac{c_3}{M^6} \right\}. \quad (2.14b)$$

Для операторного разложения функции Адлера в случае пренебрежения пионным порогом надо просто положить в этих формулах $s_\pi = 0$.

Глава 3. Нахождение коэффициентов при степенных поправках в разложении D -функции

Речь идет о коэффициентах c_1 , c_2 и c_3 в представлениях (2.14), выбираемых так, чтобы при $M^2 = 0.5 - 1.5 \text{ ГэВ}^2$ эти разложения были как можно ближе к “экспериментальной” функции

$$\Phi_{\text{exp}}(M^2) = \int_0^\infty R_{\text{exp-th}}(s) \left(1 - \frac{s}{M^2}\right) e^{-s/M^2} \frac{ds}{M^2}. \quad (3.1)$$

Для определения таких значений параметров воспользуемся подгонкой по методу наименьших квадратов. В данном случае он сводится к нахождению минимума функции χ^2 , где в качестве сравниваемых величин фигурируют экспериментальное, $\Phi_{\text{exp}}(M^2)$, и теоретические, $\Phi_{\text{РТ+ОРЕ}}(M^2)$ или $\Phi_{\text{АРТ+ОРЕ}}(M^2)$, выражения борелизованной функции Адлера.

$$\chi^2(c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{18} \sum_{n=1}^{18} \frac{(\Phi_{\text{exp}}(M_n^2) - \Phi_{(\text{A})\text{РТ+ОРЕ}}(M_n^2; c_1, c_2, c_3))^2}{\delta^2 \Phi_{\text{exp}}(M_n^2)^2}, \quad (3.2)$$

Здесь мы сами задаем относительную точность определения D -функции, $\delta = 0.01$. Фактически, это означает, что если в точке минимума $\chi^2(c_1^*, c_2^*, c_3^*) \sim 1$, то в среднем функция $\Phi_{(\text{A})\text{РТ+ОРЕ}}(M_n^2; c_1^*, c_2^*, c_3^*)$ отличается от экспериментальной $\Phi_{\text{exp}}(M^2)$ на 1%. Если же $\chi^2(c_1^*, c_2^*, c_3^*) \sim 4$, то среднее отличие вырастет до 2%. Такой выбор относительной точности приемлем, так как средняя погрешность для экспериментальных данных для реакции $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ не очень сильно возрастает: на промежутке $s = 1 - 1.5 \text{ ГэВ}^2$ она примерно равна 14%, а при $s < 1 \text{ ГэВ}^2$ она примерно равна 7%. К тому же преобразование Бореля подавляет погрешность за счет убывающей экспоненты $\exp(-s/M^2)$, появляющейся в (3.1) в результате преобразования дисперсионного знаменателя $1/(s + Q^2)$.

Зададим набор точек M_i^2 на области $M^2 = 0.5 - 1.5 \text{ ГэВ}^2$ формулой:

$$M_i^2 = M_- + \frac{i-1}{17} (M_+ - M_-), \quad (3.3)$$

при этом $M_+ = 0.5 \text{ ГэВ}^2$ и $M_- = 1.5 \text{ ГэВ}^2$. Масштабный параметр Λ в стандартной ТВ КХД в однопетлевом приближении выбираем равным 0.250 ГэВ и 0.300 ГэВ , а для АТВ КХД — 0.298 ГэВ и 0.418 ГэВ , соответственно. Отметим, что в случае АТВ мы выбрали значение масштаба Λ из условия равенства эффективных зарядов на

Таблица 1: Результаты для ТВ и АТВ КХД при $s_\pi = 0$.

	χ^2	$-c_1 [\text{ГэВ}^2]$	$c_2 [\text{ГэВ}^4]$	$-c_3 [\text{ГэВ}^6]$
РТ+ОРЕ ($\Lambda = 0.250 \text{ ГэВ}$)	2.2	0.54	0.36	0.093
АРТ+ОРЕ ($\Lambda = 0.298 \text{ ГэВ}$)	2.3	0.52	0.36	0.095
РТ+ОРЕ ($\Lambda = 0.300 \text{ ГэВ}$)	2.3	0.56	0.36	0.095
АРТ+ОРЕ ($\Lambda = 0.418 \text{ ГэВ}$)	2.4	0.53	0.37	0.097

масштабе $Q_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$, $\alpha_s(Q_0^2) = \bar{\mathcal{A}}_1(Q_0^2)$. Минимизацию $\chi^2(c_1, c_2, c_3)$ и определение наилучших коэффициентов c_1^* , c_2^* и c_3^* проводим численно с помощью стандартной функции `FindMinimum` пакета `Mathematica`.

В случае нулевой массы пиона полученные результаты сведены в Таблицу 1, в то время как результаты, полученные при учете ненулевой массы пиона, представлены в Таблице 2.

Таблица 2: Результаты для ТВ и АТВ КХД при $s_\pi = 4 m_\pi^2 = 0.0784 \text{ ГэВ}^2$.

	χ^2	$-c_1^* [\text{ГэВ}^2]$	$c_2^* [\text{ГэВ}^4]$	$-c_3^* [\text{ГэВ}^6]$
РТ+ОРЕ ($\Lambda = 0.250 \text{ ГэВ}$)	2.2	0.46	0.36	0.094
АРТ+ОРЕ ($\Lambda = 0.298 \text{ ГэВ}$)	2.3	0.44	0.36	0.095
РТ+ОРЕ ($\Lambda = 0.300 \text{ ГэВ}$)	2.3	0.48	0.36	0.095
АРТ+ОРЕ ($\Lambda = 0.418 \text{ ГэВ}$)	2.4	0.45	0.37	0.098

Качество подгонки характеризуется значением $\chi^2 \simeq 2.3$, что отвечает среднему относительному отклонению теоретической кривой от “экспериментальной” порядка 1.5%. Это согласие иллюстрируется на Рис. 8, где показаны кривые $\Phi_{\text{exp}}(M^2)$ и $\Phi_{(\text{A})\text{РТ+ОРЕ}}(M^2; c_1^*, c_2^*, c_3^*)$ в области $M^2 = 0.5 - 1.5 \text{ ГэВ}^2$.

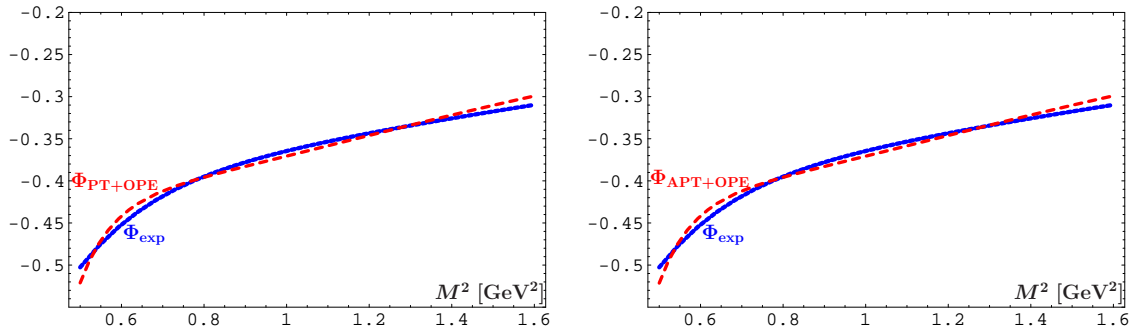


Рис. 8: Сравнение “экспериментальной” и теоретической зависимостей борелизованной функции Адлера от M^2 . Слева пунктирной кривой показана $\Phi_{\text{РТ+ОРЕ}}(M^2; c_1^*, c_2^*, c_3^*)$, а справа — $\Phi_{\text{АРТ+ОРЕ}}(M^2; c_1^*, c_2^*, c_3^*)$, сплошная кривая на обеих панелях отвечает $\Phi_{\text{exp}}(M^2)$.

Значения коэффициентов c_2^* и c_3^* в обеих схемах (ТВ и АТВ) практически совпадают. Сравним их со значениями c_2^{SR} и c_3^{SR} , используемыми в подходе правил сумм КХД [8]:

$$c_2^{\text{SR}} = \frac{2\pi}{3} \alpha_s \langle GG \rangle \simeq 0.078 \text{ ГэВ}^4;$$

$$c_3^{\text{SR}} = \frac{-448 \pi^3}{27} \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2 \simeq -0.093 \text{ ГэВ}^6,$$

которые определяются конденсатами глюонных ($\langle GG \rangle$) и кварковых ($\langle \bar{q}q \rangle$) полей.³

³Заметим, что в работе [8] строилось операторное разложение для поляризационного оператора $\Pi(Q^2)$, а мы интересуемся функцией Адлера $D(Q^2) = -Q^2 (d\Pi(Q^2)/dQ^2)$, поэтому наш коэффициент c_2^{SR} в 2 раза, а коэффициент c_3^{SR} — в 3 раза больше.

Замечательным оказывается практически полное совпадение коэффициентов c_3^* и c_3^{SR} . В то же время коэффициенты c_2^* и c_2^{SR} отличаются почти в 4.5 раза, что можно объяснить присутствием в нашем подходе отрицательного вклада c_2^*/M^2 , который имеет противоположный знак и, таким образом, эффективно уменьшает вклад c_2^*/M^2 .

Заключение

Таким образом, как это видно из таблиц 1 и 2, коэффициент c_1^* всюду получается отличным от нуля, отрицательным и много больше вклада от аналитизации. Отметим, что в подходе АТВ этот коэффициент $c_1^{\text{APT},*}$ отличается от коэффициента $c_1^{\text{PT},*}$ в стандартной ТВ на величину порядка $4\Lambda^2/9 = 0.02 \text{ ГэВ}^2$ или 0.03 ГэВ^2 , то есть именно на вклад связанный с компенсатором полюса Ландау в (0.2a).

Заметим также, что если мы учитываем в вычислениях массу π -мезона m_π^2 , то это сказывается на значении c_1^* — оно уменьшается на величину, примерно равную $s_\pi = 4m_\pi^2 = 0.0784 \text{ ГэВ}^2$. Это вполне можно объяснить, ибо при учете m_π^2 в выражении для преобразованной по Борелю D -функции (2.13a) и (2.13b) имеется вклад, пропорциональный $-s_\pi/M^2$, который и приводит к уменьшению c_1^* .

Мой вклад в работу

1. Проведена подгонка аналитическими функциями и построены графики экспериментальных данных по e^+e^- -аннигиляции в пионные каналы (0.3).
2. Проведено преобразование Бореля от однопетлевой константы связи КХД, входящей в одно из представлений D -функции.
3. Проведено преобразование Бореля D -функции Адлера в двух случаях: при пренебрежении массой π -мезона и при учете ненулевого пионного порога $s_\pi = 4m_\pi^2$.
4. Проведено сравнение выражений для двух представлений D -функции Адлера и найдены коэффициенты операторного разложения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] *Bakulev, A. P.* Inevitability and Importance of Non-Perturbative Elements in Quantum Field Theory / A. P. Bakulev, D. V. Shirkov // Proceedings of the 6th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, September 14–23, 2010, Belgrade, Serbia / Ed. by B. Dragovich, Z. Rakić. — Belgrade (Serbia): Institute of Physics, 2011. — Pp. 27–53.
- [2] *Shirkov, D. V.* A Few Lessons from pQCD Analysis at Low Energies / D. V. Shirkov. — arXiv:1202.3220 [hep-ph].
- [3] *Pasechnik, R. S.* Bjorken Sum Rule and pQCD frontier on the move / R. S. Pasechnik, D. V. Shirkov, O. V. Teryaev // *Phys. Rev.* — 2008. — Vol. D78. — P. 071902.
- [4] *Pasechnik, R. S.* Nucleon spin structure and pQCD frontier on the move / R. S. Pasechnik, D. V. Shirkov, O. V. Teryaev et al. // *Phys. Rev.* — 2010. — Vol. D81. — P. 016010.
- [5] *Khandramai, V. L.* Four-loop QCD analysis of the Bjorken sum rule vs data / V. L. Khandramai, R. S. Pasechnik, D. V. Shirkov et al. // *Phys. Lett.* — 2012. — Vol. B706. — Pp. 340–344.
- [6] *Иоффе, Б. Л.* Глубоконеупругие процессы / Б. Л. Иоффе, Л. Н. Липатов, В. А. Хозе. — Москва: Энергоатомиздат, 1983. — С. 264 с.
- [7] *Индурайн, Ф.* Квантовая хромодинамика / Ф. Индурайн. — Москва: Мир, 1986. — С. 288 с.
- [8] *Shifman, M. A.* QCD and resonance physics. Sum rules / M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov // *Nucl. Phys.* — 1979. — Vol. B147. — Pp. 385–447, 448–518, 519.
- [9] *Shirkov, D. V.* Analytic model for the QCD running coupling with universal $\bar{\alpha}_s(0)$ value / D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 79. — Pp. 1209–1212.
- [10] *Боголюбов, Н. Н.* Метод дисперсионных соотношений и теория возмущений / Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, Д. В. Ширков // *ЖЭТФ.* — 1959. — Т. 37. — С. 805.
- [11] *Radyushkin, A. V.* Optimized lambda-parametrization for the QCD running coupling constant in space-like and time-like regions / A. V. Radyushkin // *JINR Rapid Commun.* — 1996. — Vol. 78. — Pp. 96–99. — [JINR Preprint, E2-82-159, 26 Febr. 1982].
- [12] *Krasnikov, N. V.* The influence of the analytical continuation effects on the value of the QCD scale parameter lambda extracted from the data on charmonium and upsilon hadron decays / N. V. Krasnikov, A. A. Pivovarov // *Phys. Lett.* — 1982. — Vol. B116. — Pp. 168–170.

- [13] *Боголюбов, Н. Н.* Введение в теорию квантованных полей / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. — Москва: Наука, 1957, 1973, 1976, 1984. — 597 с.
- [14] *Baldicchi, M.* Bound state approach to the QCD coupling at low energy scales / M. Baldicchi, A. V. Nesterenko, G. M. Prospero, D. V. Shirkov, C. Simolo // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99. — P. 242001.
- [15] *Barkov, L. M.* Electromagnetic Pion Form-Factor in the Timelike Region / L. M. Barkov, A. G. Chilingarov, S. I. Eidelman, B. I. Khazin, M. Y. Lelchuk et al. // *Nucl. Phys.* — 1985. — Vol. B256. — Pp. 365–384.
- [16] *Cosme, G.* Hadronic cross-sections study in e^+e^- collisions from 1.350 GeV to 2.125 GeV / G. Cosme, B. Dudelzak, B. Grelaud, B. Jean-Marie, S. Jullian et al. // *Nucl. Phys.* — 1979. — Vol. B152. — P. 215.
- [17] *Bacci, C.* Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ cross-section in the $\rho'(1600)$ energy region / C. Bacci, R. Baldini-Celio, G. Battistoni, G. Capon, R. Del Fabbro et al. // *Phys. Lett.* — 1980. — Vol. B95. — P. 139.
- [18] *Cordier, A.* Study of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ reaction in the 1.4 GeV to 2.18 GeV energy range / A. Cordier, D. Bisello, J. Bizot, J. Buon, B. Delcourt et al. // *Phys. Lett.* — 1982. — Vol. B109. — P. 129.
- [19] *Barkov, L. M.* The investigation of multi-pion creation with the cryogenic magnetic detector at the VEPP-2M storage ring. (In Russian) / L. M. Barkov, I. B. Vasserman, P. V. Vorobev, P. M. Ivanov, G. Y. Kezerashvili et al. // *Sov. J. Nucl. Phys.* — 1988. — Vol. 47. — Pp. 248–252.
- [20] *Kurdadze, L. M.* Study of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ reaction at $2E$ up to 1.4 GeV / L. M. Kurdadze, M. Y. Lelchuk, E. V. Pakhtusova, V. A. Sidorov, A. N. Skrinisky et al. // *JETP Lett.* — 1988. — Vol. 47. — Pp. 512–515.
- [21] *Bisello, D.* e^+e^- annihilation into multi-hadrons in the 1350 MeV – 2400 MeV energy range / D. Bisello et al. // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* — 1991. — Vol. 21. — Pp. 111–117.
- [22] *Dolinsky, S. I.* Summary of experiments with the neutral detector at the e^+e^- storage ring VEPP-2M / S. I. Dolinsky, V. P. Druzhinin, M. S. Dubrovin, V. B. Golubev, V. N. Ivanchenko et al. // *Phys.Rept.* — 1991. — Vol. 202. — Pp. 99–170.
- [23] *Akhmetshin, R. R.* Cross-section of the reaction $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ below 1 GeV at CMD-2 / R. R. Akhmetshin et al. // *Phys. Lett.* — 2000. — Vol. B475. — Pp. 190–197.
- [24] *Achasov, M. N.* Analysis of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ and $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ processes in the energy range of $\sqrt{s} = 0.98 - 1.38$ GeV in experiments with a spherical neutral detector / M. N. Achasov, K. I. Beloborodov, A. V. Berdyugin, A. G. Bogdanchikov, A. V. Bozhenok et al. // *J. Exp. Theor. Phys.* — 2003. — Vol. 96. — Pp. 789–800.
- [25] *Akhmetshin, R. R.* Total cross section of the process $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ in the C.M. energy range 980 MeV to 1380-MeV / R. R. Akhmetshin et al. // *Phys. Lett.* — 2004. — Vol. B595. — Pp. 101–108.

- [26] *Aubert, B.* The $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$, $K^+K^-\pi^+\pi^-$, and $K^+K^-K^+K^-$ cross sections at center-of-mass energies 0.5 GeV – 4.5 GeV measured with initial-state radiation / B. Aubert et al. // *Phys. Rev.* — 2005. — Vol. D71. — P. 052001.
- [27] *Aubert, B.* The $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$, $2(\pi^+\pi^-\pi^0)$ and $K^+K^-2(\pi^+\pi^-)$ cross sections at center-of-mass energies from production threshold to 4.5 GeV measured with initial-state radiation / B. Aubert et al. // *Phys. Rev.* — 2006. — Vol. D73. — P. 052003.
- [28] *Chetyrkin, K. G.* Higher order corrections to $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ in quantum chromodynamics / K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachov // *Phys. Lett.* — 1979. — Vol. B85. — P. 277.
- [29] *Gorishnii, S. G.* The $O(\alpha_s^3)$ corrections to $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ and $\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})$ in QCD / S. G. Gorishnii, A. L. Kataev, S. A. Larin // *Phys. Lett.* — 1991. — Vol. B259. — Pp. 144–150.
- [30] *Baikov, P. A.* Order α_s^4 QCD Corrections to Z and τ Decays / P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 012002.
- [31] *Baikov, P. A.* Adler Function, Bjorken Sum Rule, and the Crewther Relation to Order α_s^4 in a General Gauge Theory / P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 132004.
- [32] *Milton, K.* An Analytic method of describing R-related quantities in QCD / K. Milton, I. Solovtsov, O. Solovtsova // *Mod. Phys. Lett.* — 2006. — Vol. A21. — Pp. 1355–1368.
- [33] *Gounaris, G. J.* Finite width corrections to the vector meson dominance prediction for $\rho \rightarrow e^+e^-$ / G. J. Gounaris, J. J. Sakurai // *Phys. Rev. Lett.* — 1968. — Vol. 21. — Pp. 244–247.
- [34] *Cho, C. F.* Vector-meson-dominance predictions on inelastic electron- proton scattering / C. F. Cho, G. J. Gounaris, J. J. Sakurai // *Phys. Rev.* — 1969. — Vol. 186. — Pp. 1734–1737.
- [35] *Achasov, N. N.* Electromagnetic form factor of pion in the field theory inspired approach / N. N. Achasov, A. A. Kozhevnikov // *Phys. Rev.* — 2011. — Vol. D83. — P. 113005.
- [36] Study of the process $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ in the energy region $400 < \sqrt{s} < 1000$ MeV / M. N. Achasov, K. I. Beloborodov, A. V. Berdyugin et al. // *J. Exp. Theor. Phys.* — 2005. — Vol. 101. — Pp. 1053–1070.
- [37] *Aulchenko, V. M.* Measurement of the pion form-factor in the range 1.04 GeV to 1.38 GeV with the CMD-2 detector / V. M. Aulchenko et al. // *JETP Lett.* — 2005. — Vol. 82. — Pp. 743–747.
- [38] Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ cross section with the CMD-2 detector in the 370–520 MeV c.m. energy range / R. R. Akhmetshin, V. M. Aulchenko, V. S. Banzarov et al. // *JETP Lett.* — 2006. — Vol. 84. — Pp. 413–417.

- [39] *Akhmetshin, R. R.* High-statistics measurement of the pion form factor in the rho-meson energy range with the CMD-2 detector / R. R. Akhmetshin et al. // *Phys. Lett.* — 2007. — Vol. B648. — Pp. 28–38.
- [40] *Nesterenko, A. V.* The massive analytic invariant charge in QCD / A. V. Nesterenko, J. Papavassiliou // *Phys. Rev.* — 2005. — Vol. D71. — P. 016009.
- [41] *Nesterenko, A. V.* A novel integral representation for the Adler function / A. V. Nesterenko, J. Papavassiliou // *J. Phys.* — 2006. — Vol. G32. — Pp. 1025–1034.
- [42] *Нестеренко, А. В.* Теоретическое описание процессов сильного взаимодействия во времениподобной области. Учебное пособие для студентов физического факультета / А. В. Нестеренко. — Москва: Физический факультет МГУ, 2009. — С. 1–103.