

Московский Физико-Технический Институт
(Государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра фундаментальных и прикладных проблем физики
микромира
Объединенный институт ядерных исследований
Учебно-научный центр

Власенко Д.Е.

Амплитуды в $D=6$ $N=(1,1)$

Магистерская диссертация

Научный руководитель
д.ф.-м.н. Казаков Д.И.
Рецензент
к.ф.-м.н. Бедняков А.В.

Дубна Июнь 2014

Содержание

1	Введение	2
2	Методы	4
2.1	Спиральная техника	4
2.2	Физическое суперпространство	5
3	Амплитуда	8
3.1	Древесное приближение	9
3.2	Особенности и ограничения	9
3.3	1- и 2-х Петлевое приближение	10
4	Асимптотическое поведение	15
4.1	Лидирующие логарифмы	15
4.2	Лидирующие степени	16
4.3	Лидирующие расходимости	17
5	Обсуждение результатов	18
6	Приложение	19
6.1	А. Расчёт интегралов	19
6.2	В. n-петлевая лестничная диаграмма	21
	Список литературы	23

1 Введение

В последнее время возник интерес к вычислению амплитуд в максимально суперсимметричных теориях SYM [1, 2] в частности в максимально суперсимметричной теории гравитации [3]. Такие 4-х мерные калибровочные теории как $\mathcal{N} = 4$ SYM и $\mathcal{N} = 8$ SUGRA являются наиболее интересными примерами. Существует надежда, что этот класс теорий обладает рядом весьма важных свойств, среди которых сокращение ультрафиолетовых расходимостей, факторизация высших петлевых поправок и возможная полная интегрируемость. Так, успех относительно полученного BDS анзаца [1] в $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ SYM стимулирует подобную деятельность в других моделях и пространствах большей размерности. Множество интересных свойств было обнаружено в структуре S-матриц теорий в различных размерностях [4]), так, в частности, было понято, что структура планарных интеграндов является идентичной, так же, все теории обладают различными признаками конформной инвариантности и дуальной конформной инвариантности [5, 6, 7]. Как следствие, теории подобного рода обладают схожими свойствами относительно ультрафиолетовых расходимостей, так связь между первой сингулярностью и размерностью пространства суперсимметричной теории была получена в работах [8, 9, 10]

$$D = 4 + 6/L, \quad (1)$$

где D это размерность, а L - количество петель.

Данная деятельность стала возможной благодаря развитию современных техник и методов: "spinor helicity" и "momentum twistor" различного рода рекуррентных соотношений для древесных амплитуд, "unitarity based methods" для расчёта петлевых диаграмм, а так же, техники "on-shell superspace" [4]. Все эти техники были расширены на пространства размерностью больше $D = 4$ [11, 22, 13].

В работе рассмотрена одна из подобных моделей, а именно $D = 6$ $\mathcal{N} = (1, 1)$ SYM. Эта максимально суперсимметричная теория в пространстве размерностью $D = 6$, которая может быть сведена к $D = 4$ $\mathcal{N} = 4$ SYM путём специфической компактификации. Так же, эта теория может быть рассмотрена как низкоэнергетический предел теории струн или M теории [14]. $D = 6$ $\mathcal{N} = (1, 1)$ является неперенормируемой теорией в рамках стандартного пертурбативного подхода. Стоит отметить, что константа связи имеет размерность -2 в единицах массы, как и в теории гравитации, таким образом $D = 6$ $\mathcal{N} = (1, 1)$ может рассматриваться как некий упрощённый аналог модели гравитации. Помимо прочего, существует, в некотором роде, практическое приложение моделей в 6-и мерии, а именно, безмассовая амплитуда в 6-и мерном пространстве может быть интерпретирована как 4-х мерная массивная.

В ходе работы проведен анализ суперамплитуды в рамках вышеперече-

численных методик, который приводит к весьма любопытным результатам касательно применимости пертурбативного подхода к исследованию неперенормируемых теорий.

Работа построена следующим образом, вначале, кратко описаны все основные методы использующиеся в ходе вычислений, далее рассмотрена структура 4-х частичной амплитуды, после чего приведено вычисление нескольких асимптотик: старшие логарифмы, степени и старшие полюса. В конце представлено обсуждение полученных результатов. Все крупные вычисления вынесены в Приложения.

2 Методы

2.1 Спиральная техника

Преимущество данной техники заключается в том, что она позволяет рассматривать физические амплитуды с внешними частицами определённой спиральности, без нефизических артефактов калибровочной теории [4]. Описанная здесь техника 6-и мерного спирального формализма по большей части основана на работах [22] и [15].

Рассмотрим безмассовый $D = 6$ вектор p^μ , $p^2 = 0$, $\mu = 1, \dots, 6$ который трансформируется по векторному представлению $D = 6$ Лоренцевой группы $SO(5, 1)$. Используя антисимметричные 6-и мерные матрицы Паули $(\sigma^\mu)_{AB}$ и $(\bar{\sigma}^\mu)^{AB}$, где индексы $A, B = 1, \dots, 4$ относятся к фундаментальному представлению $Spin(SO(5, 1)) \simeq SU(4)^*$ (что является покрывающей группой $SO(5, 1)$) можно переписать p^μ аналогично случаю $D = 4$ следующим образом:

$$p^{AB} = p^\mu (\bar{\sigma}_\mu)^{AB}, \quad (2)$$

или

$$p_{AB} = p_\mu (\sigma^\mu)_{AB}. \quad (3)$$

Заметим что индексы A, B можно поднимать и опускать используя абсолютно антисимметричные объекты ϵ^{ABCD} и ϵ_{ABCD} ассоциирующиеся с $SU(4)^*$:

$$(\sigma^\mu)_{AB} = \frac{1}{2} \epsilon_{ABCD} (\bar{\sigma}^\mu)^{CD}. \quad (4)$$

Равенство $p^2 = 0$ в терминах матриц p^{AB} эквивалентно $\det(p) = 0$, т.е. можно представить p^{AB} как произведение 2-х коммутирующих $SU(4)^*$ спиноров:

$$p^{AB} = \lambda^{Aa} \lambda_a^B, \quad p_{AB} = \tilde{\lambda}_{A\dot{a}} \tilde{\lambda}_{B\dot{a}}. \quad (5)$$

Заметим что спиноры λ^{Aa} и $\tilde{\lambda}_{A\dot{a}}$, в противоположность случаю $D = 4$, вместе с индексом покрывающей группы A так же несут индексы малой группы $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$, $a = 1, 2$ и $\dot{a} = \dot{1}, \dot{2}$. Малая группа для D измерений есть $SO(D - 2)$, так для $D = 4$ это просто $SO(2) \simeq U(1)$ и действие малой группы $D = 4$ на спинор сводится к умножению на комплексное число z , $|z| = 1$. Однако, в случае $D = 6$ это действие не является тривиальным, и как следствие, спиральность больше не является сохраняющейся величиной, в противоположность случаю $D = 4$. Так же, стоит заметить, что индексы малой группы a и \dot{a} можно поднимать и опускать используя антисимметричные объекты ϵ_{ab} и $\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ относящиеся к $SU(2)$ группам. Важным фактом 6-и мерного спинорного формализма

является его простота, в том смысле, что аналогично случаю $D = 4$ нет никаких ограничений на спиноры λ^{Aa} и $\tilde{\lambda}^{\dot{a}}_A$ [15].

Используя вышеприведённые правила, можно построить Лоренц - инвариантные произведения спиноров:

$$\lambda(i)^{Aa} \tilde{\lambda}(j)^{\dot{a}}_A \doteq \langle i_a | j_{\dot{a}} \rangle = [j_{\dot{a}} | i_a], \quad (6)$$

где i и j индексы входящих импульсов p_i^μ и p_j^μ связанных с $\lambda(i)^{Aa}$ и $\tilde{\lambda}(j)^{\dot{a}}_A$. В дополнение к ним, можно записать ещё две Лоренц - инвариантные комбинации спиноров, которые будут полезны в ходе вычислений:

$$\epsilon_{ABCD} \lambda(1)^{Aa} \lambda(2)^{Bb} \lambda(3)^{Cc} \lambda(4)^{Dd} \doteq \langle 1_a 2_b 3_c 4_d \rangle, \quad (7)$$

$$\epsilon^{ABCD} \tilde{\lambda}(1)^{\dot{a}}_A \tilde{\lambda}(2)^{\dot{b}}_B \tilde{\lambda}(3)^{\dot{c}}_C \tilde{\lambda}(4)^{\dot{d}}_D \doteq [1_{\dot{a}} 2_{\dot{b}} 3_{\dot{c}} 4_{\dot{d}}]. \quad (8)$$

Так же существует возможность построения инварианта используя комбинацию импульсов и спиноров:

$$\lambda(i)^{A_1 a} p_{1, A_1 A_2} p_2^{A_2 A_3} \dots p_{2n+1, A_{2n} A_{2n+1}} \lambda(j)^{A_{2n+1} b} \doteq \langle i^a | p_1 p_2 \dots p_{2n+1} | j^b \rangle \quad (9)$$

$$\lambda(i)^{A_1 a} p_{1, A_1 A_2} p_2^{A_2 A_3} \dots p_{2n}^{A_{2n-1} A_{2n}} \tilde{\lambda}(j)^{\dot{b}}_{A_{2n}} \doteq \langle i^a | p_1 p_2 \dots p_{2n} | j^{\dot{b}} \rangle \quad (10)$$

2.2 Физическое суперпространство

Далее стоит рассмотреть построение суперпространства физических состояний, или "on-shell momentum superspace" $D = 6$ $\mathcal{N} = (1, 1)$ теории. Некоторые аспекты $\mathcal{N} = (1, 1)$ $D = 4, 6$ теорий в терминах стандартных координат вне массовой поверхности или "off-shell" были разработаны в [18]. Физическое или "on-shell" $\mathcal{N} = (1, 1)$ суперпространство в $D = 6$ SYM впервые было сформулировано в [15]. Как следует из этой работы, суперпространство может быть параметризовано следующим набором координат

$$\mathcal{N} = (1, 1) \text{ D=6 on-shell superspace} = \{\lambda_a^A, \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}}, \eta_a^I, \bar{\eta}_{I\dot{a}}\}, \quad (11)$$

где η_a^I и $\bar{\eta}_{I\dot{a}}$ Грассмановы координаты, $I = 1, 2$ и $I' = 1', 2'$ есть $SU(2)_R \times SU(2)_R$ индексы относящиеся к R-симметрии. Следует отметить, что настоящее суперпространство не является киральным т.е. существует 2 типа суперзарядов q^{AI} и $\bar{q}_{AI'}$ с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} \{q^{AI}, q^{BJ}\} &= p^{AB} \epsilon^{IJ}, \\ \{\bar{q}_{AI'}, \bar{q}_{BJ'}\} &= p_{AB} \epsilon_{I'J'}, \\ \{q^{AI}, \bar{q}_{BJ'}\} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

on-shell супермультиплет в $\mathcal{N} = (1, 1)$ $D = 6$ SYM состоит из глюона $A_{a\dot{a}}$, 2-х фермионов $\Psi_I^a, \bar{\Psi}^{I'\dot{a}}$ и 2-х комплексных скаляров $\phi_I^{I'}$ (антисимметричных отношению к перестановке I, I'). Суперпространство является СРТ само-сопряжённым. Однако, чтобы скомбинировать все физические состояния в одно суперсостояние $|\Omega\rangle$ по аналогии с $\mathcal{N} = 4$ $D = 4$ SYM необходимо выполни усечение полного $\mathcal{N} = (1, 1)$ суперпространства [15]. В самом деле, при разложении произвольной функции X (или же самого $|\Omega\rangle$ суперсостояния) определённой на полном суперпространстве по Грассмановым переменным, встречаются члены типа $\sim \eta_a^I \bar{\eta}_{I'\dot{a}} A_I^{I'a\dot{a}}$. Так как такого бозонного $A_I^{I'a\dot{a}}$ состояние в $\mathcal{N} = (1, 1)$ SYM супермультиплете не существует, необходимо исключить эти члены, налагая ограничения на X , иными словами, выполнить усечение полного on-shell суперпространства. Как показано в работе [15] это может быть последовательно выполнено в рамках "harmonic superspace technique". Определяя гармонические переменные u_I^\mp и $\bar{u}^{\pm I'}$ которые параметризуют пространство

$$\frac{SU(2)_R}{U(1)} \times \frac{SU(2)_R}{U(1)} \quad (13)$$

можно выразить спроецированные суперзаряды, Грассмановы координаты

$$\begin{aligned} q^{\mp A} &= u_I^\mp q^{AI}, \quad \bar{q}_A^\pm = u^{\pm I'} \bar{q}_{AI'}, \\ \eta_a^\mp &= u_I^\mp \eta_a^I, \quad \bar{\eta}_{\dot{a}}^\pm = u^{\pm I'} \bar{\eta}_{I'\dot{a}}, \end{aligned} \quad (14)$$

и операторы рождения/уничтожения физических состояний

$$\begin{aligned} &\phi^{--}, \phi^{-+}, \phi^{+-}, \phi^{++}, \\ &\Psi^{-a}, \Psi^{+a}, \bar{\Psi}^{-\dot{a}}, \bar{\Psi}^{+\dot{a}}, \\ &A^{a\dot{a}}. \end{aligned} \quad (15)$$

в терминах новых гармонических переменных.

Рассмотрим объект X который зависит от половины Грассмановых координат $\eta_a^-, \bar{\eta}_{\dot{a}}^+$, иначе словами, наложим ограничения на X :

$$D_A^+ X = \bar{D}^{-A} X = 0, \quad (16)$$

где X функция полного физического суперпространства, а D_A^\pm и $\bar{D}^{\pm A}$ проекторы (12). Это может быть сделано самосогласованным путём если проекторы подчиняются алгебре: [15]:

$$\{D_A^+, D_B^+\} = \{\bar{D}^{-A}, \bar{D}^{-B}\} = \{D_A^+, \bar{D}^{-B}\} = 0, \quad (17)$$

что как раз и соответствует равенствам.(12). Поэтому, в дальнейшем рассматриваются объекты, которые зависят только от набора координат, которые параметризуют подпространство, так называемое "analytic superspace" полного $\mathcal{N} = (1, 1)$ физического суперпространства

$$\{\lambda_a^A, \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}}, \eta_a^-, \bar{\eta}_a^+\}. \quad (18)$$

спроецированные суперзаряды, действующие в аналитическом суперпространстве в одно-частичном случае могут быть представлены в виде:

$$q^{-A} = \lambda_a^A \eta^{-a}, \quad \bar{q}_A^+ = \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}} \bar{\eta}_a^+. \quad (19)$$

Теперь можно объединить все физические состояния и операторы рождения/уничтожения (15) в одно суперсостояние $|\Omega_i\rangle = \Omega_i|0\rangle$ (где i нумерует импульс определённого состояния):

$$\begin{aligned} |\Omega_i\rangle &= \{\phi_i^{-+} + \phi_i^{++}(\eta^- \eta^-)_i + \phi_i^{--}(\bar{\eta}^+ \bar{\eta}^+)_i + \phi_i^{+-}(\eta^- \eta^-)_i(\bar{\eta}^+ \bar{\eta}^+)_i \\ &+ (\Psi^+ \eta^-)_i + (\bar{\Psi}^- \bar{\eta}^+)_i + (\Psi^- \eta^-)_i(\bar{\eta}^+ \bar{\eta}^+)_i + (\bar{\Psi}^+ \bar{\eta}^+)_i(\eta^- \eta^-)_i \\ &+ (A\eta^- \bar{\eta}^+)_i\}|0\rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

где $(XY)_i \doteq X_i^{a/\dot{a}} Y_i_{a/\dot{a}}$. Здесь и в дальнейшем индексы \pm опущены для упрощения выражений.

3 Амплитуда

Основной целью является расчёт много частичной амплитуды на массовой поверхности. В связи с чем, изначально стоит выполнить цветное разложение, извлекая цвето-упорядоченную парциальную амплитуду[4]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^{a_1 \dots a_n}(p_1^{\lambda_1} \dots p_n^{\lambda_n}) &= \\ &= \sum_{\sigma \in S_n/Z_n} \text{Tr}[\sigma(T^{a_1} \dots T^{a_n})] A_n(\sigma(p_1^{\lambda_1} \dots p_n^{\lambda_n})) + \mathcal{O}(1/N_c). \end{aligned} \quad (21)$$

цвето-упорядоченная амплитуда A_n рассчитывается в планарном пределе, который соответствует случаю $N_c \rightarrow \infty$, $g_{YM}^2 \rightarrow 0$ и $g_{YM}^2 N_c = \text{const}$.

Суперамплитуда должна быть инварианта относительно действия суперзарядов(19) и полного момента, иными словами инвариантна в аналитическом суперпространстве, что налагает на неё дополнительные ограничения.

$$q^A A_n = \bar{q}_A A_n = p^{AB} A_n = 0, \quad (22)$$

в случае n -частиц имеем:

$$q^A = \sum_i^n \lambda_a^A(i) \eta_i^a, \quad \bar{q}_A = \sum_i^n \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}}(i) \bar{\eta}_{\dot{a},i}, \quad p^{AB} = \sum_i^n \lambda^{Aa}(i) \lambda_a^B(i). \quad (23)$$

Из всего вышесказанного можно заключить, что амплитуда имеет следующую форму:

$$A_n(\{\lambda_a^A, \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}}, \eta_a, \bar{\eta}_{\dot{a}}\}) = \delta^6(p^{AB}) \delta^4(q^A) \delta^4(\bar{q}_A) \mathcal{P}_n(\{\lambda_a^A, \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}}, \eta_a, \bar{\eta}_{\dot{a}}\}), \quad (24)$$

где \mathcal{P}_n полином по η и $\bar{\eta}$ степени $2n - 8$. В дальнейшем, дельта-функция отражающая закон сохранения полного момента $\delta^6(p^{AB})$ будет опущена. Легко заметить, что наиболее простой случай реализуется при $n = 4$, когда степень Грассманового полинома равна $2n - 8 = 0$, таким образом \mathcal{P}_4 является функцией только бозонных переменных $\{\lambda_a^A, \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}}\}$,

$$A_4(\{\lambda_a^A, \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}}, \eta_a, \bar{\eta}_{\dot{a}}\}) = \delta^4(q^A) \delta^4(\bar{q}_A) \mathcal{P}_4(\{\lambda_a^A, \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}}\}). \quad (25)$$

Дальнейший анализ посвящён именно этой 4-х частичной амплитуде.

3.1 Древесное приближение

В древесном приближении конкретный вид \mathcal{P}_4 может быть найдена исходя из сравнения с 4-х глюонной амплитудой [22, 15] полученной при помощи 6-и мерной VCFW рекурсии:

$$\mathcal{A}_4^{(0)}(1_{a\dot{a}}2_{b\dot{b}}3_{c\dot{c}}4_{d\dot{d}}) = -ig_{YM}^2 \frac{\langle 1_a 2_b 3_c 4_d \rangle [1_{\dot{a}} 2_{\dot{b}} 3_{\dot{c}} 4_{\dot{d}}]}{st}. \quad (26)$$

Сравнивая это выражение с(25) и раскладывая(25) по степеням $\eta, \bar{\eta}$, извлекая коэффициент перед $(\eta\bar{\eta})_1(\eta\bar{\eta})_2(\eta\bar{\eta})_3(\eta\bar{\eta})_4$ можно заключить, что:

$$\mathcal{P}_4^{(0)} = -ig_{YM}^2/st,$$

где s и t стандартные переменные Мандельштама. Таким образом конечный вид суперамплитуды в древесном приближении представляется в очень компактной форме:

$$A_4^{(0)} = -ig_{YM}^2 \frac{\delta^4(q^A)\delta^4(\bar{q}_A)}{st}. \quad (27)$$

3.2 Особенности и ограничения

Прежде чем рассматривать радиационные поправки, необходимо уделить внимание общей структуре теории. Так $D = 6N = (1, 1)$ обладает размерной константой связи, что говорит о том, что никакой конформной симметрии в классическом смысле быть не может. Однако в древесном приближении амплитуда обладает дуальной конформной инвариантностью [6], иначе говорят, она инвариантна относительно I и специального преобразования K^μ . Точный вид I, K^μ и как вводятся дуальные координаты можно найти в [6]. При этих преобразованиях амплитуда изменяется следующим образом

$$\begin{aligned} I[\mathcal{P}_n^{(0)}] &= \prod_{i=1}^n x_i^2 \mathcal{P}_n^{(0)}, \\ K^\mu[\mathcal{P}_n^{(0)}] &= \sum_{i=1}^n 2x_i^\mu \mathcal{P}_n^{(0)}, \end{aligned} \quad (28)$$

где x_i^μ дуальные импульсу координаты p_i^μ . Комбинация δ -функций $\delta^6(p^{AB})\delta^4(q^A)\delta^4(\bar{q}_A)$ преобразуется ковариантно с фактором $(x_1^2)^2$, который в дальнейшем будет опущен. На петлевом уровне L-петлевой интегрант $Int\mathcal{P}_n^{(L)}$ преобразуется при инверсии I как:

$$I[Int\mathcal{P}_n^{(L)}] = \prod_{i=1}^n x_i^2 \prod_{k=1}^L (x_{i_k}^2)^4 Int\mathcal{P}_n^{(L)}, \quad (29)$$

где l_k импульс бегущий по петле. Таким образом, конформная инвариантность ограничивает вид интеграндов, что приводит к разложения по теории возмущений, из которого выпадают баблы и треугольники и все, что остаётся, это последовательность бокс-диаграмм Рис.1. Так же, необ-

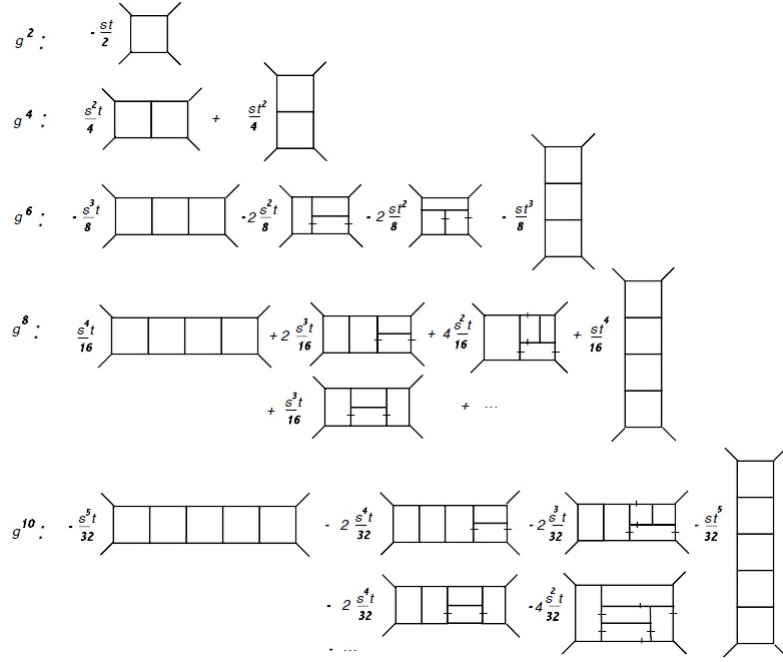


Рис. 1: Теоретико-возмущенческое разложение 4-х частичной амплитуды.

ходимо упомянуть свойства относительно расходимостей. В [8, 9], было предложено соотношение на ультрафиолетовую конечность

$$D < 4 + \frac{6}{L}, \quad L \geq 2. \quad (30)$$

для любой максимально суперсимметричной теории, что в случае $D = 6$ говорит нам о том, что первая расходимость может возникнуть только в 3-х петлевом приближении. Так же стоит подчеркнуть факт отсутствия в $D = 6$ $\mathcal{N} = (1, 1)$ SYM инфракрасных расходимостей.

3.3 1- и 2-х Петлевое приближение

¹Аналитическому вычислению поддаются одна- и двух-петлевые приближения. Расчёт соответствующих диаграмм может быть выполнена в рамках техники унитарных разрезов, или "unitarity cuts (описание техники

¹По ниже приведённым результатам этого раздела опубликована работа [19]

можно найти, например в [16]). Ввиду того, что амплитуда в этих порядках теории возмущений не имеет ни ультрафиолетовой ни инфракрасной расходимости, вычисление может быть проведено без какой либо регуляризации. Так, наиболее простой путь выразить ответ через скалярные интегралы, это воспользоваться суперамплитудой (27) и 2-х частичным разрезом (Рис.2)

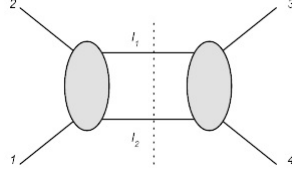


Рис. 2: 2-х частичный s-канальный разрез для амплитуды в одно-петлевом приближении.

Принимая во внимание законы сохранения импульса двух амплитуд по обе стороны разреза: $1 + 2 + l_1 + l_2 = 0$ и $-l_1 - l_2 + 3 + 4 = 0$, где введены обозначения

$$\begin{aligned} q_L^A &= q_1^A + q_2^A, \\ q_R^A &= q_3^A + q_4^A, \\ q_{l_1 l_2}^A &= q_{l_1}^A + q_{l_2}^A. \end{aligned} \quad (31)$$

Интегранд для s-канала 2-х частичного разреза одно-петлевого приближения принимает следующий вид [15, 17]²

$$IntA_4^{(1)} = \int d^4\eta_{l_1 l_2} d^4\eta_{l_2 l_1} A_4^{(0)}(1, 2, l_1, l_2) \times A_4^{(0)}(-l_1, -l_2, 3, 4) \quad (34)$$

Используя (27) и (33), можно получить: (общий фактор $g_{YM}^4 N_c$ опускается)

²Возникающие в этом подходе суммы по состояниям вычисляются с использованием следующих соотношений. Интеграл от $\delta(X)\delta(\bar{X})$ вычисляется по правилам:

$$\int d\eta_i^a \int d\bar{\eta}_j^b \delta(q^A)\delta(\bar{q}_B) = \lambda(i)^{Aa} \tilde{\lambda}(j)^b_B, \quad (32)$$

Интеграл же по полному суперпространству (18) вычисляется так

$$\int d^2\eta_{l_1}^a \int d^2\bar{\eta}_{l_2}^b \doteq \int d^4\eta_{l_1 l_2},$$

что приводит к

$$\int d^4\eta_{l_1 l_2} d^4\eta_{l_2 l_1} \delta^4(q^A)\delta^4(\bar{q}_B) = 2(l_1, l_2)^2. \quad (33)$$

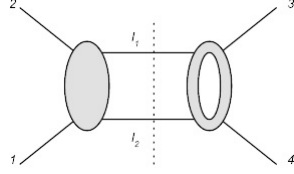


Рис. 3: 2-х частичный s-канальный разрез для амплитуды в двух-петлевом приближении.

$$\begin{aligned}
IntA_4^{(1)} &= - \int d^4\eta_{l_1l_2} d^4\eta_{l_2l_1} \frac{\delta^4(q_R^A + q_{l_1l_2}^A) \delta^4(q_L^A - q_{l_1l_2}^A)}{s^2(2+l_1)^2} \\
&\times \frac{\delta^4(\bar{q}_{A,R} + \bar{q}_{A,l_1l_2}) \delta^4(\bar{q}_{A,L} - \bar{q}_{A,l_1l_2})}{(4+l_2)^2} \\
&= -\delta^4(q_R^A + q_L^A) \delta^4(\bar{q}_{A,R} + \bar{q}_{A,L}) \frac{2(l_1l_2)^2}{s^2(2+l_1)^2(4+l_2)^2} \\
&= A_4^{(0)} \frac{st}{2} \frac{-i}{(2+l_1)^2(4+l_2)^2} \tag{35}
\end{aligned}$$

что соответствует части амплитуды ассоциирующей с s-канальным разрезом

$$-A_4^{(0)} \frac{st}{2} B(s, t), \tag{36}$$

где $B(s, t)$ есть $D = 6$ скалярная бокс интеграл. t-канальный разрез даёт тот же самый результат, что в результате приводит к выражению для амплитуды в одно-петлевом приближении:

$$A_4^{(1)} = -A_4^{(0)} \frac{g_{YM}^2 N_c}{2} st B(s, t). \tag{37}$$

Аналогичным образом применяя 2-х частичный разрез к интегралу соответствующему 2-х петлевой диаграмме(в s-канале), получаем (смотри Рис.3)

$$\begin{aligned}
Int A_4^{(2)} &= \int d^4 \eta_{l_1 l_2} d^4 \eta_{l_2 l_1} A_4^{(0)}(1, 2, l_1, l_2) \times A_4^{(1)}(-l_1, -l_2, 3, 4) \\
&= \int d^4 \eta_{l_1 l_2} d^4 \eta_{l_2 l_1} \frac{\delta^4(q_R^A + q_{l_1 l_2}^A) \delta^4(q_L^A - q_{l_1 l_2}^A)}{2s} \\
&\times \frac{\delta^4(\bar{q}_{A,R} + \bar{q}_{A,l_1 l_2}) \delta^4(\bar{q}_{A,L} - \bar{q}_{A,l_1 l_2})}{(2 + l_1)^2} B(s, (4 + l_2)^2) \\
&= \delta^4(q_R^A + q_L^A) \delta^4(\bar{q}_{A,R} + \bar{q}_{A,L}) \frac{(l_1 l_2)^2}{s(2 + l_1)^2} B(s, (4 + l_2)^2) \\
&= A_4^{(0)} \frac{s^2 t}{4} \frac{i}{(2 + l_1)^2} B(s, (4 + l_2)^2), \tag{38}
\end{aligned}$$

что соответствует части амплитуды ассоциирующей с s-канальным разрезом

$$A_4^{(2)}|_s = A_4^{(0)} \frac{s^2 t}{4} DB(s, t), \tag{39}$$

где $DB(t, s)$ это $D = 6$ скалярный двойной бокс. t-канальный разрез даёт тот же результат:

$$A_4^{(2)}|_t = A_4^{(0)} \frac{st^2}{4} DB(t, s), \tag{40}$$

объединяя 2 вклада вместе, получаем:

$$A_4^{(2)} = A_4^{(0)} \frac{(g_{YM}^2 N_c)^2}{4} (s^2 t DB(s, t) + st^2 DB(t, s)). \tag{41}$$

Вычисление $B(s, t)$ и $DB(t, s)$, наиболее простым путём, может быть выполнено в рамках представления Меллина — Барнса (смотри Приложение А). Ответ для них представляется в терминах логарифмов, полилогарифмов и гармонических сумм, и имеет следующий вид, для $B(s, t)$

$$B(s, t) = \frac{\pi^3}{(2\pi)^6} \frac{b_2(x)}{s+t}, \quad b_2(x) = \frac{L^2(x) + \pi^2}{2}, \quad x = \frac{t}{s}. \tag{42}$$

где $L(x) \doteq \log(x)$. для $DB(s, t)$ [24]:

$$DB(s, t) = \left(\frac{\pi^3}{(2\pi)^6} \right)^2 \left(\frac{b_4(x)}{t} + \frac{b_3(x)}{s+t} \right), \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned}
b_4(x) &= \left(2\zeta_3 - 2Li_3(-x) - \frac{\pi^2}{3} L(x) \right) L(1+x) \\
&+ \left(\frac{1}{2} L(x) + \frac{\pi^2}{2} \right) L^2(1+x) + \left(2L(x)L(1+x) - \frac{\pi^2}{3} \right) Li_2(-x) \\
&+ 2L(x)S_{1,2}(-x) - 2S_{2,2}(-x), \tag{44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3(x) &= -2\zeta_3 + \frac{\pi^2}{3}L(x) - (L(x) + \pi^2)L(1+x) \\
&- 2L(x)Li_2(-x) + 2Li_3(-x)
\end{aligned} \tag{45}$$

и $S_{1,2}$ и $S_{2,2}$ гармонические полиномы.

Как видно из вида точного ответа для данных порядков теории возмущений никакой приметной структуры выделить не удаётся, однако, если рассмотреть так называемый Редже предел, когда $s \rightarrow +\infty$ and $t < 0$, то можно заметить следующее поведение

$$B(s, t)|_{s \rightarrow \infty} \simeq \frac{1}{2} \frac{L^2(x)}{s} + \dots \tag{46}$$

для $A_4^{(2)}$ данный предел приводит к (причём основной вклад идет из вертикального двойного бокса $DB(t, s)$):

$$DB(t, s)|_{s \rightarrow \infty} \simeq \frac{1}{12} \frac{L^4(x)}{s} + \dots \tag{47}$$

где опущены все члены $\sim L^k(x)$, с $k < 2n$ вместе с константами.

Как можно видеть, полученные выражения (46) и (47) очень напоминают первые члены ряда. В этом свете представляется интересным проследить асимптотическое поведение всех последовательностей диаграмм, которые можно просуммировать, что и будет рассмотрено в следующей главе.

4 Асимптотическое поведение

³ Прежде чем переходить к суммированию последовательностей, необходимо отметить важную особенность касательно радиационных поправок. Так, в любом порядке теории возмущений амплитуда пропорциональна бозонной и фермионной δ -функции, отражающей закон сохранения импульса (25). Это означает, что древесная амплитуда всегда выделяется мультипликативным фактором, и в результате, получается универсальное выражение для суперамплитуды с радиационными поправками:

$$A_4(s, t) = A_4^{(0)}(s, t) [1 + \text{loop corrections}]. \quad (48)$$

4.1 Лидирующие логарифмы

Как и в случае с двойным боксом, в каждом порядке теории возмущений основной логарифмический вклад в Редже пределе приходит из вертикальной лестничной диаграммы. Данное асимптотическое поведение может быть вычислено в полной аналогии со случаем $D=4$ (смотри Приложение В) и, в конечном итоге, приводит к результату для n -петлевой лестничной диаграммы

$$\frac{1}{s} \frac{L^{2n}(x)}{n!(n+1)!}. \quad (49)$$

что после объединения с комбинаторным фактором $st^n/2^n$ приводит к ряду

$$A_4 \simeq A_4^{(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n L^{2n}(x)}{n!(n+1)!}, \quad \lambda \equiv \frac{g_{YM}^2 N_c |t|}{128\pi^3}. \quad (50)$$

Этот ряд может быть просуммирован, и конечный ответ представляется в виде функции Бесселя с мнимым аргументом

$$A_4 \simeq A_4^{(0)} \frac{I_1(2y)}{y}, \quad y \equiv \sqrt{\lambda} L(x). \quad (51)$$

в пределе $y \rightarrow \infty$ асимптотика функции Бесселя есть $I_1(2y) \rightarrow \exp(2y)/(2\sqrt{\pi y})$, что приводит к типичному Редже поведению

$$\frac{A_4}{A_4^{(0)}} \sim \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha(t)-1} \quad (52)$$

с

$$\alpha(t) = 1 + 2\sqrt{\lambda} = 1 + \sqrt{\frac{g_{YM}^2 N_c |t|}{32\pi^3}}. \quad (53)$$

т.е как можно видеть, логарифмические поправки суммируются и приводят к функции степенного поведения.

³По ниже приведённым результатам этого раздела опубликована работа [20]

4.2 Лидирующие степени

Как было показано в работе [21] лидирующее степенное поведение по s исходит из горизонтальных боксов $B_n(s, t)$ изображенных на Рис.1. Так, n -петлевой горизонтальный бокс может быть представлен в форме

$$B_n(s, t) = \frac{1}{s} (C_n + O(t/s)), \quad n \geq 2, \quad (54)$$

где лидирующее поведение, в пределе $s \rightarrow \infty$ определяется константами C_n . Несколько первых констант, вплоть до 6-и петлевого приближения, были рассчитаны в работе [21]. Результаты представлены в таблице:

Loops	1	2	3	4	5	6
Values	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{\pi^2}{3}$	$-\pi^2 + \frac{31\pi^6}{1890}$ $-8\zeta_3 + 4\zeta_3^2$			
Numerics	4.93	3.29	2.06	2.05	2.42	3.13

(55)

Как можно видеть C_n не обладает какой либо итеративной структурой, и ничего не остаётся кроме как использовать для них численные значения. Полученные числа удовлетворяют следующей интерполяционной формуле:

$$C_n \approx \frac{1.63^n}{1.31n - 1.80} \approx 0.76 \frac{(\pi^2/6)^n}{n - 4/3}, \quad n \geq 2. \quad (56)$$

что продемонстрировано на Рис.4

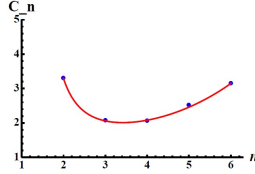


Рис. 4: Интерполяционная кривая

Применяя эту формулу, можно просуммировать полный бесконечный ряд показанный на Рис.1 и получить

$$\begin{aligned} \frac{A_4}{A_4^{(0)}} \Big|_{L.P.} &\approx -\frac{g^2 t}{2} \left[\frac{\pi^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} 0.76 \frac{(-g^2 s/2)^{n-1} (\pi^2/6)^n}{n - 4/3} \right] \\ &= -\frac{g^2 t}{2} \frac{\pi^2}{2} \left[1 - 0.76 \frac{g^2 s \pi^2}{24} {}_2F_1\left(1, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{g^2 s \pi^2}{12}\right) \right] \approx \\ &\quad - \frac{g^2 t}{2} \frac{\pi^2}{2} \left[1 - \left(\frac{g^2 s}{2}\right)^{1/3} \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Важно отметить, что результирующее поведение, соответствующее бесконечному ряду, отличается от отдельной диаграммы: в то время как каждая диаграмма растёт степенным образом по s , полная сумма является гладкой функцией s . Точная форма функции не критична, равенство (57) лишь демонстрирует общую тенденцию.

4.3 Лидирующие расходимости

Как следует из 1 ультрафиолетовые расходимости начинаются с 3-й петли, где они приходят из диаграмм показанных на Рис.1, так называемый "теннисный корт"⁴. Каждая из этих диаграмм имеет расходимость $1/\epsilon$, но при этом они отличаются по степеням s и t . Нас интересует лидирующее расходимости вида $1/\epsilon^n$ с лидирующей степенью по s .

В 4-х петлях старший полюс имеет вид $1/\epsilon^2$, в 5-и петлевом, $1/\epsilon^3$ и так далее. Высшие расходимости выражаются через более низкие по средствам R-операции, а именно все расходимости после вычитания низших подрасходимостей должны иметь локальный вид. Это утверждение относится ко всем локальным теориям поля, независимо от их перенормируемости. Этот факт позволяет вычислять старшие расходимости без фактического вычисления интегралов. Вычисление было проведено вплоть до 5-и петлевого приближения. Так в 4-х петлевом порядке старший полюс исходит из 3-х диаграмм, которые имеют 3-х петлевые расходящиеся подграфы, в 5-и петлях, это 10 диаграмм с 3 и 4 петлевыми подграфами. Во всех этих диаграммах расходящимся подграфом является вышеупомянутый "теннисный корт". Результаты вычисления для лидирующих расходимостей и лидирующей степени по s приведены в таблице

Loops	Combinatorics	Divergence
3	$(-g^2s/2)^3 2t/s$	$1/6\epsilon$
4	$(-g^2s/2)^4 2t/s$	$1/36\epsilon^2$
5	$(-g^2s/2)^5 2t/s$	$1/216\epsilon^3$

(58)

Можно предположить что получающаяся последовательность является геометрической прогрессией

$$\frac{A_4}{A_4^{(0)}} \Big|_{Leading Div.} = 2 \frac{t}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{g^2s}{2} \right)^{n+2} \left(\frac{1}{6\epsilon} \right)^n = 2 \frac{t}{s} \left(-\frac{g^2s}{2} \right)^2 \frac{\frac{-g^2s}{12\epsilon}}{1 + \frac{g^2s}{12\epsilon}}. \quad (59)$$

Весьма примечательным является то, что в пределе $\epsilon \rightarrow +0$ сумма имеет

⁴расходимость этих диаграмм так же видно из прямого подсчёта степеней соответствующих интегралов

конечный предел

$$\left. \frac{A_4}{A_4^{(0)}} \right|_{Leading Div.} \rightarrow -2 \frac{t}{s} \left(-\frac{g^2 s}{2} \right)^2 = -\frac{g^4 s t}{2}. \quad (60)$$

Таким образом сумма бесконечного ряда расходящихся членов - конечна. Предположительно, следующие за лидирующим расходимости ведут себя подобным образом.

5 Обсуждение результатов

Полученные результаты приводят к весьма далеко идущему заключению.

Так, во-первых, в противоположность перенормируемым теориям, конечное число членов не обеспечивает корректного ответа: бесконечная сумма ведет себя отлично от поведения каждого члена теории возмущений. В рассмотренной модели это относится как к лидирующим логарифмам, так и к степеням. Суммирование бесконечного ряда лидирующих логарифмов даёт степенное поведение, в то время как сумма лидирующих степеней воспроизводит гладкое поведение. Вполне возможно, что полученное Редже поведение является правильным для всей теории.

Во-вторых, обычная пертурбативная теория имеет расходимость в каждом члене, в то время как полный ряд является конечным. Это свойство было проверено вплоть до 5 петель для лидирующих расходимостей и лидирующих степеней. Не стоит и говорить, что проверка этого факта для случая следующих за лидирующим порядка расходимости и степени была бы весьма желательна.

Если все сказанное правда, это означает, что в неперенормируемых теориях конечное число членов теории возмущений не имеет никакого смысла, в то время как полная теория существует. Это может означать что различные ультрафиолетовые расходимости в определённом порядке теории возмущений являются лишь артефактами разложения по константе слабой связи. Ввиду того, что рассмотренная теория является игрушечной моделью гравитации, было бы интересно применить все эти соображения к ней. Следовательно, неперенормируемость не должна стать препятствием для исследования квантовой гравитации, т.е полная теория имеет смысл, но теория возмущений является просто не применимой в данном случае. Таким образом, можно заключить, что для понимая неперенормируемой теории необходимо найти альтернативный способ описания. Вполне возможно, что таковым может оказаться некий дуальный способ описания, подобный AdS/CFT соответствию, реджезации глюонов и т.д.

6 Приложение

6.1 А. Расчёт интегралов

Здесь представлено вычисление скалярного бокса и двойного бокса. Бокс интеграл определяется так

$$Box(s, t) = \frac{1}{i} \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^2(k+p_1)^2(k+p_1+p_2)^2(k-p_4)^2}. \quad (61)$$

Этот интеграл может быть вычислен используя Фейнмановскую параметризацию. Результат даётся выражением (42).

Двойной бокс интеграл определяется следующим образом

$$DBox(s, t) = \frac{1}{i^2} \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{d^6 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^2 l^2 (k+p_1)^2 (k+p_1+p_2)^2} \times \frac{1}{(l+p_1+p_2)^2 (l+p_1+p_2+p_4)^2 (k-l)^2}. \quad (62)$$

Этот интеграл вычисляется при помощи представления Меллина — Барнса. Соответствующее представление горизонтального двойного бокса взято из книги В. Смирнова [23]

$$DBox_6(s, t) = \frac{-\pi^6}{s} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz_1 \dots dz_4}{(2\pi)^{12} (2\pi i)^4} x^{z_1} \frac{\Gamma(1+z_1)\Gamma(-z_1-z_2)}{(z_2+z_4)(z_3+z_4)} \times \frac{\Gamma(-z_1-z_3)\Gamma(-z_2-z_3-z_4)\Gamma(-z_1)\Gamma(1+z_2)\Gamma(1+z_3)\Gamma(z_4)}{(2+z_1-z_4)(1+z_1+z_4)} \times \Gamma(1+z_1+z_2+z_3+z_4)\Gamma(1+z_1-z_4) \quad (63)$$

где $x = t/s$. Меллин-Барнсовские интегралы могут быть вычислены используя леммы Барнса (смотри [23], Ch.D). Чтобы контролировать правильность выбора контуров интегрирования, каждый шаг проверялся численно. Для этих целей необходимо выбрать реальные части переменных интегрирования z_i таким образом, чтобы все аргументы Γ функции в (63) были положительными. Одним из возможных выборов является $z_1 = -1/4, z_2 = -9/32, z_3 = -27/64, z_4 = 9/16$. Очевидно, но все же стоит отметить, что результат не зависит от конкретного выбора этих значений.

Интегрирование по z_2 выполняется прямо по леммам Барнса.

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz_2}{2\pi i} \frac{\Gamma(1+z_2)\Gamma(-z_1-z_2)\Gamma(-z_2-z_3-z_4)\Gamma(1+z_1+z_2+z_3+z_4)}{(z_2+z_4)} = \Gamma(1-z_1)\Gamma(z_3+z_4)\Gamma(z_1)\Gamma(1-z_3-z_4) \left(1 - \frac{\Gamma(-z_1+z_4)\Gamma(-z_3)}{\Gamma(z_4)\Gamma(-z_1-z_3)} \right) \quad (64)$$

Интеграл по z_3 уже не такой простой, ввиду вырожденности по аргументу Γ функции. Для вычисления необходимо изменить контур интегрирования при этом держа все полюса с права. Результат представляется в следующей форме

$$\begin{aligned}
& - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz_3}{2\pi i} \Gamma(1+z_3)\Gamma(-z_1-z_3)\Gamma(-z_3-z_4)\Gamma(z_3+z_4) \\
& \times \left(1 - \frac{\Gamma(-z_1+z_4)\Gamma(-z_3)}{\Gamma(z_4)\Gamma(-z_1-z_3)}\right) = \Gamma(1-z_4)\Gamma(-z_1+z_4) \\
& \times [\psi(z_4) - \psi(-z_1+z_4) + \psi(1-z_1) - \psi(1)] \tag{65}
\end{aligned}$$

Интеграл по z_4 может быть разложен на 2 интеграла, каждый из которых снова может быть вычислен с помощью следствий из первой леммы Барнса

$$\begin{aligned}
& \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz_4}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-z_4)\Gamma(-z_1+z_4)\Gamma(1+z_1-z_4)\Gamma(z_4)}{(2+z_1-z_4)(1+z_1-z_4)} \\
& \times [\psi(z_4) - \psi(-z_1+z_4) + \psi(1-z_1) - \psi(1)] \\
& = - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz_4}{2\pi i} \Gamma(1-z_4)\Gamma(-1-z_1+z_4)\Gamma(1+z_1-z_4)\Gamma(z_4) \\
& \times [\psi(z_4) - \psi(-z_1+z_4) + \psi(1-z_1) - \psi(1)] \\
& - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz_4}{2\pi i} \Gamma(1-z_4)\Gamma(-2-z_1+z_4)\Gamma(2+z_1-z_4)\Gamma(z_4) \\
& \times [\psi(z_4) - \psi(-z_1+z_4) + \psi(1-z_1) - \psi(1)]
\end{aligned}$$

Выбор контуров интегрирования необходимо производить отдельно для каждого члена. Суммируя, получаем ответ для интегрирования по z_4

$$-2\Gamma(1+z_1)\Gamma(-z_1)\frac{z_1}{1+z_1}(\psi(1+z_1) - \psi(1)) \tag{66}$$

Остаётся выполнить последнее интегрирование по z_1

$$\begin{aligned}
DBox_6(s, t) & = \left(\frac{\pi^3}{(2\pi)^6}\right)^2 \frac{2}{s} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz_1}{2\pi i} x^{z_1} [\Gamma(1+z_1)\Gamma(-z_1)]^3 \\
& \times [\psi(1+z_1) - \psi(1)] \left(1 - \frac{1}{1+z_1}\right) \tag{67}
\end{aligned}$$

которое производится путём взятия вычетов в точках $z_1 = 0, 1, \dots$ с последующим суммированием. Последний шаг может быть выполнен с помощью формул из [23], Ch.C. Результат выглядит следующим образом

$$DBox_6(s, t) = \left(\frac{\pi^3}{(2\pi)^6}\right)^2 \left(\frac{b_4(x)}{t} + \frac{b_3(x)}{s+t}\right), \tag{68}$$

где функции $b_i(x)$ выписана выше и соответствует полученной в [24] при помощи метода дифференциальных уравнений.

6.2 В. n-петлевая лестничная диаграмма

Рассмотрим $D = 6$ скалярный бокс интеграл 1-ранга изображенный на Рис.1 Он ультрафиолетово и инфракрасно конечен для любых l . Интерес представляет его асимптотическое поведение в Редже пределе, когда $s \rightarrow +\infty$, $t < 0$ и фиксировано. Начнём рассмотрение со случая $l = 1$, который выражается интегралом:

$$B_{l=1}(s, t) = \frac{1}{i} \int \frac{d^6 k}{(2\pi)^6} \frac{1}{k^2(k-p_2)^2(k+p_1)^2(k+p_1+p_4)^2}. \quad (69)$$

Используя Судаковские переменные, можно параметризовать петлевой импульс

$$k = \alpha p_2 + \beta p_1 + k_\perp, \quad (70)$$

в результате получаем

$$d^6 k = \frac{s}{2} d\alpha d\beta d^4 k_\perp, \quad d^4 k_\perp = k_\perp^2 dk_\perp^2 d\Omega_4, \quad (71)$$

где как обычно

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_4)^2, \quad s > 0, t < 0. \quad (72)$$

В пределе $s \gg 1$ $(k + p_1)^2$ и $(k - p_2)^2$ могут быть оценены как

$$(k + p_1)^2 \simeq s\alpha, \quad (k - p_2)^2 \simeq -s\beta, \quad (73)$$

таким образом мы можем переписать $B_{l=1}$ как (Здесь и в дальнейшем опущен общий фактор $(-\pi^3/(2\pi)^6)^l$)

$$B_{l=1}(s, t) \simeq \frac{1}{s} \int_{t/s}^1 \frac{d\alpha d\beta}{\alpha\beta} \int \frac{d^4 k_\perp}{k^2(k+p_1+p_4)^2}. \quad (74)$$

Лидирующая асимптотика интеграла типа бабл может быть оценена как

$$\int \frac{d^4 k_\perp}{k^2(k+p_1+p_4)^2} \simeq \theta(s\alpha\beta - t), \quad (75)$$

Так для бокс интеграла можно получить (напомним, что $x = s/t$, $L(x) \doteq \log(x)$)

$$\begin{aligned} B_{l=1}(s, t) &\simeq \frac{1}{s} \int_{t/s}^1 \frac{d\alpha d\beta}{\alpha\beta} \theta(s\alpha\beta - t) = \int_0^{L(x)} da \int_0^{L(x)} db \theta(a + b - t) \\ &= \frac{L^2(x)}{s} \int_0^1 da db \theta(a + b - 1) = \frac{1}{2} \frac{L^2(x)}{s}, \end{aligned} \quad (76)$$

что согласуется с (42).

Для двойного бокса $B_{l=2}(s, t)$ используя тоже самое приближение получаем (α_i, β_i) соответствующие импульсу интегрирования $d^6 k_i$):

$$\begin{aligned} B_{l=2}(s, t) &\simeq \frac{1}{s} \int_{t/s}^1 \frac{d\alpha_1 d\beta_2}{\alpha_1 \beta_2} \frac{d\alpha_2 d\beta_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)} \theta(s\alpha_1\beta_1 - t)\theta(s\alpha_2\beta_2 - t) \\ &\simeq \frac{L^4(x)}{s^2} \int_0^1 \prod_{i=1}^2 da_i db_i \theta(a_1 + b_1 - 1)\theta(a_2 + b_2 - 1) \\ &\times \theta(a_1 - a_2)\theta(b_2 - b_1) = \frac{1}{12} \frac{L^4(x)}{s}, \end{aligned} \quad (77)$$

Что снова соответствует прямому вычислению (43).

Вычислений для l -петлевого бокса может быть выполнено тем же образом

$$B_l(s, t) \simeq \frac{L^{2l}(x)}{s} \mathcal{I}_l, \quad l \geq 2 \quad (78)$$

с

$$\mathcal{I}_l = \int_0^1 \prod_{i=1}^l da_i db_i \prod_{k=1}^l \theta(a_k + b_k - 1) \prod_{p=1}^{l-1} \theta(a_p - a_{p+1}) \prod_{m=1}^{l-1} \theta(b_{m+1} - b_m) \quad (79)$$

Наиболее простой путь вычисления этого интеграла это рассчитать его численно для нескольких значений l . Результат совпадает с аналитической формулой

$$\mathcal{I}_l = \frac{1}{l!(l+1)!} \quad (80)$$

Таким образом мы получаем следующий результат для лидирующих логарифмической асимптотики $D = 6$ l -петлевой бокс функции:

$$B_l(s, t) \simeq \frac{1}{l!(l+1)!} \frac{L^{2l}(x)}{s} \quad (81)$$

Список литературы

- [1] Z. Bern, L. J. Dixon and V. A. Smirnov, *Iteration of planar amplitudes in maximally supersymmetric Yang-Mills theory at three loops and beyond*, Phys. Rev. D **72**, 085001 (2005), arXiv:0505205 [hep-th],
Z. Bern, M. Czakon, D. A. Kosower, R. Roiban and V. A. Smirnov, *Two-loop iteration of five-point $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills amplitudes*, Phys. Rev. Lett. **97**, 181601 (2006), arXiv:0604074 [hep-th],
Z. Bern, M. Czakon, L. Dixon, D. A. Kosower, V. A. Smirnov, *The Four-Loop Planar Amplitude and Cusp Anomalous Dimension in Maximally Supersymmetric Yang-Mills Theory.*, Phys. Rev. D **75** 085010 (2007), arXiv:0610248v2 [hep-th],
Z. Bern, J. J. M. Carrasco, H. Johansson and D. A. Kosower, *Maximally supersymmetric planar Yang-Mills amplitudes at five loops*, Phys. Rev. D **76**, 1250020 (2007), arXiv:0705.1864 [hep-th],
L. J. Dixon, J. M. Drummond, C. Duhr, J. Pennington, *The four-loop remainder function and multi-Regge behaviour at NNLLA in planar $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills theory*, arXiv:1402.3300v1 [hep-th].
- [2] Z. Bern, J. J. Carrasco, L. J. Dixon, M. R. Douglas, Matt von Hippel, H. Johansson, *$D = 5$ maximally supersymmetric Yang-Mills theory diverges at six loops*, Phys. Rev. D **87** (2013) 025018, arXiv:1210.7709 v1 [hep-th].
- [3] Z. Bern, J.J.M. Carrasco, H. Johansson, *Progress on Ultraviolet Finiteness of Supergravity*, (2009), arXiv:0902.3765 v2 [hep-th],
L. J. Dixon, *Ultraviolet Behavior of $\mathcal{N} = 8$ Supergravity*, (2010), arXiv:1005.2703 v1 [hep-th],
H. Elvang, D. Z. Freedman, M. Kiermaier, *SUSY Ward identities, Superamplitudes, and Counterterms*, J. Phys. A **44** 454009 (2011), arXiv:1012.3401 v2 [hep-th],
Z. Bern, J. J. Carrasco, L. Dixon, H. Johansson, R. Roiban, *Amplitudes and Ultraviolet Behavior of $N = 8$ Supergravity*, Fortsch. Phys. **561** (2011), arXiv:1103.1848 v2 [hep-th].
- [4] Z. Bern, L. J. Dixon, D. A. Kosower *Progress in One-Loop QCD Computations*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **46** (1996) 109, arXiv:hep-ph/9602280 v1.
Z. Bern, L. J. Dixon, D.A. Kosower *On-Shell Methods in Perturbative QCD*, Annal. of Phys. **322** (2007) 1587, arXiv:0704.2798 [hep-ph],
R. Britto *Loop amplitudes in gauge theories: modern analytic approaches*, J. Phys. A **44**, 454006 (2011), arXiv:1012.4493 v2 [hep-th],
Z. Bern, Yu-tin Huang *Basics of Generalized Unitarity*, J. Phys. A **44** (2011) 454003, arXiv:1103.1869 v1 [hep-th],

- H. Elvang, Yu-tin Huang, *Scattering Amplitudes*, arXiv:1308.1697 v1 [hep-th].
- [5] J. M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky and E. Sokatchev, *Dual Superconformal Symmetry of scattering amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. B **828** 317 (2010) 140, arXiv:0807.1095 [hep-th].
- [6] T. Dennen, Yu-tin Huang, *Dual Conformal Properties of Six-Dimensional Maximal Super Yang-Mills Amplitudes*, JHEP **1101** (2011) 140, arXiv:1010.5874 v2 [hep-th].
- [7] Z. Bern, J.J. Carrasco, T. Dennen, Yu-tin Huang, and H. Ita, *Generalized Unitarity and Six-Dimensional Helicity*, Phys. Rev. D **83** 085022 (2011), arXiv:1010.0494 v2 [hep-th].
- [8] Z. Bern, J. S. Rozowsky and B. Yan, *Two-Loop Four-Gluon Amplitudes in $N = 4$ Super-Yang-Mills*, Phys. Lett. B **401** (1997) 273, arXiv:hep-ph/9702424 v3.
- [9] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar, M. Perelstein and J. S. Rozowsky, *On the Relationship between Yang-Mills Theory and Gravity and its Implication for Ultraviolet Divergences*, Nucl. Phys. B 530 (1998) 401, arXiv:hep-th/9802162 v2.
- [10] M. B. Green, J. H. Schwarz and L. Brink, *$N = 4$ Yang-Mills and $N = 8$ Supergravity as Limits of String Theories*, Nucl. Phys. B **198** (1982) 474.
- [11] R. H. Boels, D. O’Connell, *Simple superamplitudes in higher dimensions*, JHEP **1206** (2012) 163, arXiv:1201.2653 [hep-th].
- [12] C. Cheung, D. O’Connell, *Amplitudes and Spinor-Helicity in Six Dimensions*, JHEP **0907** (2009) 075, arXiv:0902.0981 [hep-th].
- [13] S. Caron-Huot, D. O’Connell, *Spinor Helicity and Dual Conformal Symmetry in Ten Dimensions*, JHEP **1108** (2011) 014, arXiv:1010.5487 [hep-th].
- [14] B. Czech, Yu-tin Huang, M. Rozali, *Amplitudes for Multiple $M5$ Branes*, JHEP **10** (2012) 143, arXiv:1110.2791v2 [hep-th].
- [15] T. Dennen, Yu-tin Huang, W. Siegel, *Supertwistor space for $D6$ maximal super Yang-Mills*, JHEP **1004** (2010) 127, arXiv:0910.2688 v3 [hep-th].
- [16] H. Elvang, Yu-tin Huang, *Scattering Amplitudes*, arXiv:1308.1697v2 [hep-th] (2014).

- [17] A. Brandhuber, D. Korres, D. Koschade, G. Travaglini, *One-loop Amplitudes in Six-Dimensional (1,1) Theories from Generalised Unitarity*, JHEP **1102** (2011) 077, arXiv:1010.1515 v1 [hep-th].
- [18] E.A. Ivanov, B.M. Zupnik *Non-Anticommutative Deformations of $N=(1,1)$ Supersymmetric Theories*, Theor.Math.Phys. **142** 197-210 (2005), arXiv:0405185 [hep-th],
 I.L. Buchbinder, E.A. Ivanov, O. Lechtenfeld, I.B. Samsonov, B.M. Zupnik *Gauge theory in deformed $N=(1,1)$ superspace*, Phys.Part.Nucl. **39** 759-797 (2008), arXiv:0709.3770 [hep-th],
 E.A. Ivanov, A.V. Smilga *Conformal properties of hypermultiplet actions in six dimensions*, Phys.Lett.B **637** 374-381 (2006), arXiv:0510273 [hep-th],
 E.A. Ivanov, A.V. Smilga, B.M. Zupnik *Renormalizable supersymmetric gauge theory in six dimensions*, Nucl.Phys.B **726** 131-148 (2005), arXiv:0505082 [hep-th].
- [19] L. V. Bork, D. I. Kazakov, D. E. Vlasenko, *On the amplitudes in $\mathcal{N} = (1, 1)$ $D=6$ SYM*, JHEP 1311 (2013) 065 e-Print: arXiv:1308.0117 [hep-th].
- [20] L. V. Bork, D. I. Kazakov, D. E. Vlasenko, *Challenges of $D=6$ $N=(1,1)$ SYM Theory*, Physics Letters B (2014) e-Print:arXiv:1404.6998 [hep-th].
- [21] D.I. Kazakov, *Evaluation of Multi-Box Diagrams in Six Dimensions*, e-Print: arXiv:1402.1024 [hep-th] , JHEP to appear.
- [22] C. Cheung, D. O’Connell, *Amplitudes and Spinor-Helicity in Six Dimensions*, JHEP **0907** (2009) 075, arXiv:0902.0981 [hep-th].
- [23] V.A.Smirnov, *Feynman Integral Calculus*, Springer-Verlag BerlinHeidelberg (2006).
- [24] C. Anastasiou, J. B. Tausk, M. E. Tejeda-Yeomans, *The on-shell massless planar double box diagram with an irreducible numerator*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89** (2000) 262, arXiv:hep-ph/0005328 v1.